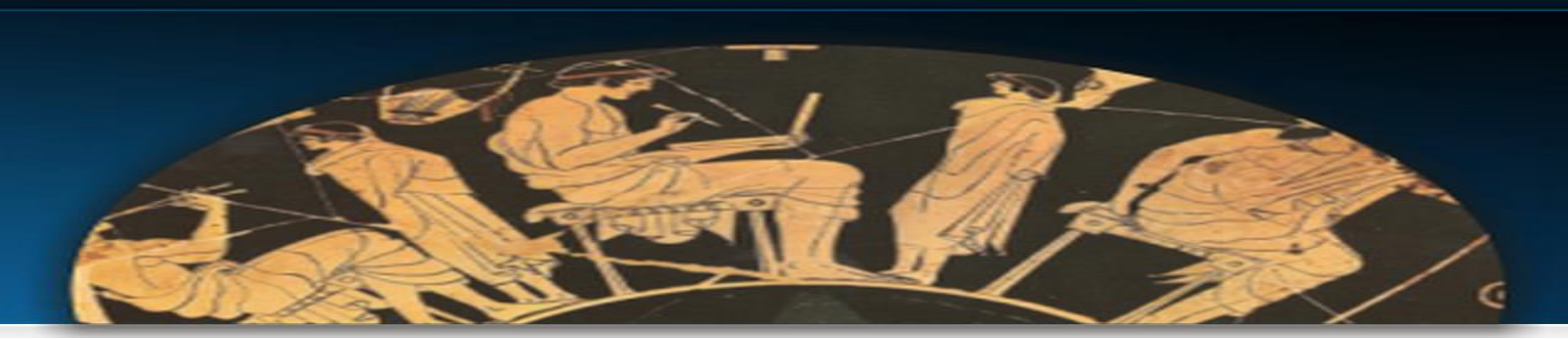
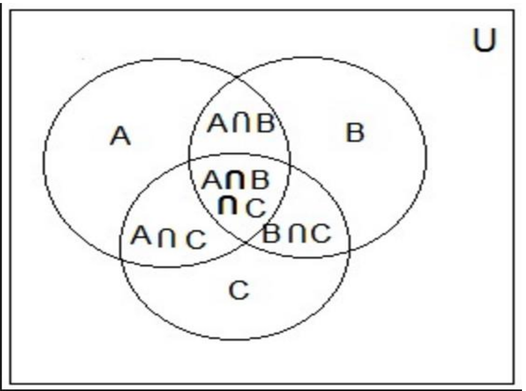


Συνδυαστική

Δημήτρης Μαυρίδης

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων



Συνδυαστική

Σε πολλά προβλήματα της στατιστικής πρέπει να απαριθμήσουμε όλους τους δυνατούς τρόπους με τους οποίους μπορεί να παρουσιαστεί μια κατάσταση

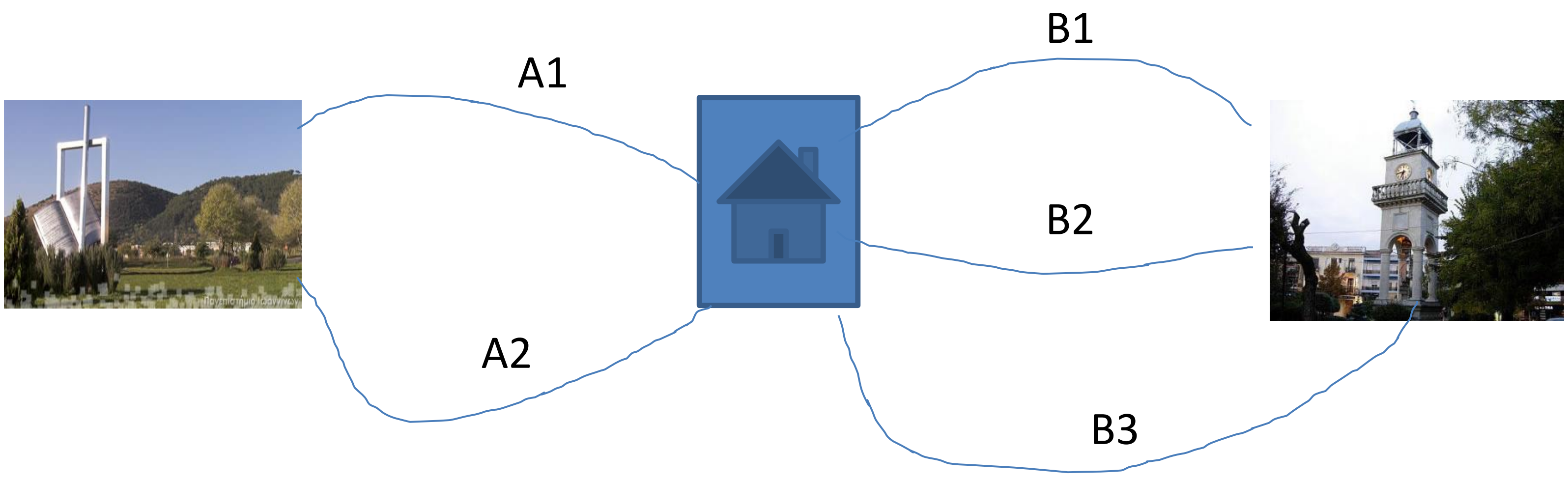
ή

να καθορίσουμε τον αριθμό των διαφορετικών περιπτώσεων που υπάρχουν.

Ο κλάδος εκείνος των μαθηματικών που ασχολείται με την απαρίθμηση των περιπτώσεων ονομάζεται συνδυαστική

Συνδυαστική

<u>Πολλαπλασιαστική αρχή</u>: Αν μια διαδικασία χωρίζεται σε ν φάσεις που μπορούν να εκτελεστούν με $m_1, m_2, \ldots, m_n$ τρόπους αντίστοιχα, τότε η διαδικασία μπορεί να εκτελεστεί με $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_n$ τρόπους συνολικά



Συνολικά μπορώ να μετακινηθώ με 6 τρόπους {(A1B1), (A1B2), (A1B3), (A2B1), (A2B2), (A2B3)}

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Στις εκλογές ενός συμβουλίου, υπάρχουν 3 υποψήφιοι (Π1, Π2, Π3) για τη θέση του προέδρου και 4 (Γ1, Γ2, Γ3, Γ4) για τη θέση του γραμματέα.

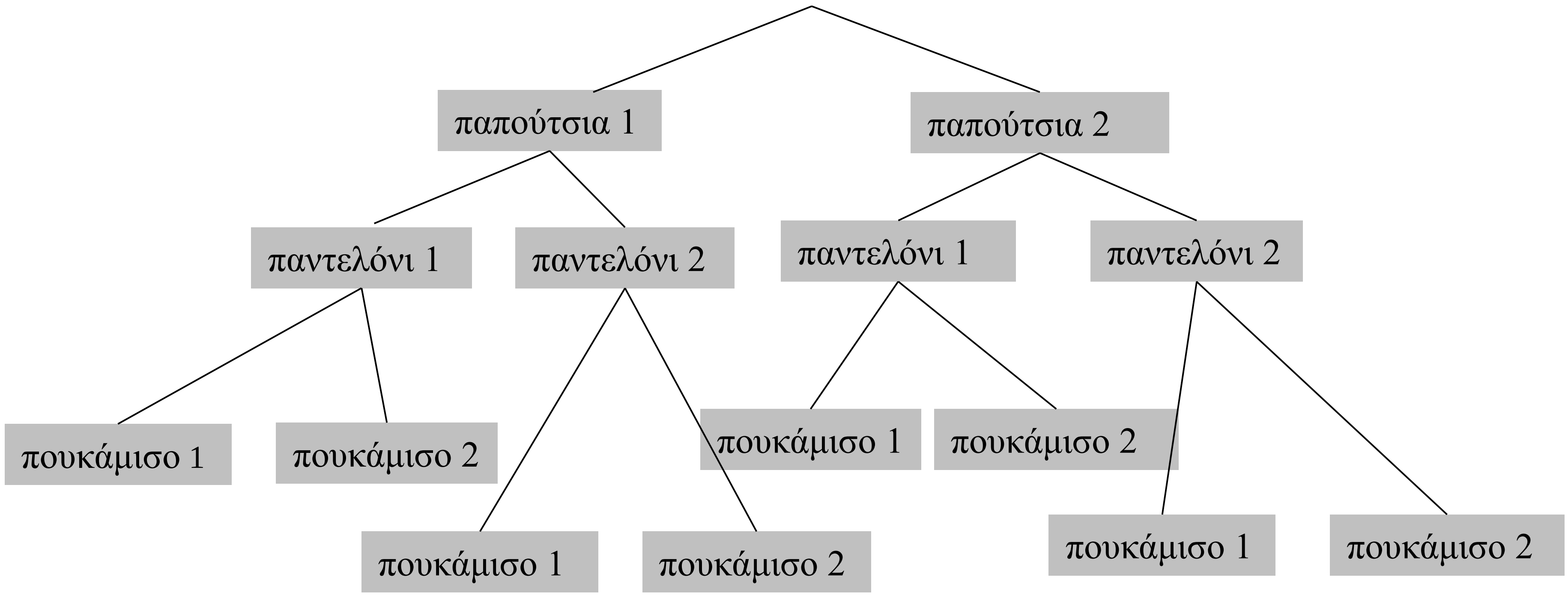
- Με πόσους τρόπους μπορούν να καλυφθούν και οι δύο θέσεις;

Με $3 \times 4 = 12$ τρόπους.

(Π1,Γ1), (Π1,Γ2), (Π1,Γ3), (Π1,Γ4),
(Π2,Γ1), (Π2,Γ2), (Π2,Γ3), (Π2,Γ4),
(Π3,Γ1), (Π3,Γ2), (Π3,Γ3), (Π3,Γ4)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν είναι διαθέσιμα 2 ζευγάρια παπούτσια, 2 παντελόνια και 2 πουκάμισα. Με πόσους τρόπους μπορεί κάποιος να ντυθεί;



Με $2 \times 2 \times 2 = 8$ τρόπους

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Πόσες πινακίδες αυτοκινήτων μπορώ να κατασκευάσω, αν μία πινακίδα αποτελείται από 3 γράμματα (του ελλην. αλφαβ.) και 4 αριθμούς (ο πρώτος δεν μπορεί να είναι 0);

24 24 24 9 10 10 10

πινακίδες

$$24^{3} \times 9 \times 10^{3}$$

- Για τρεις κενές θέσεις σε ένα λύκειο , μιας μαθηματικού, μιας φυσικού και μιας φιλολόγου, υποβάλλουν αίτηση 4, 3 και 7 άτομα αντίστοιχα. Με πόσους τρόπους μπορούν να συμπληρωθούν οι θέσεις.

$$4 \times 3 \times 7 = 84 \text{ τρόπους}$$

- Πόσα δυνατά σχήματα απαντήσεων υπάρχουν σε ένα διαγώνισμα πολλαπλής επιλογής όπου υπάρχουν 3 επιλογές για τις πρώτες 7 ερωτήσεις και 2 για τις 3 τελευταίες

- Οι πρώτες 7 ερωτήσεις μπορούν να απαντηθούν με 3^7 τρόπους
- Οι 3 τελευταίες ερωτήσεις μπορούν να απαντηθούν με 2^3 τρόπους

- Οπότε συνολικά $3^7 2^3 = 17496$

Παραγοντικό (factorial)

- Αν ο ν είναι μη αρνητικός ακέραιος, τότε το γινόμενο $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ συμβολίζεται ν! και ονομάζεται ‘ν παραγοντικό’
- 0!=1
- 1!=1
- 2!=1x2=2
- 3!=1x2x3=6
- Γενικά ν!=(ν-1)!ν
- 4!=3!x4=24
- 5!=4!x5=24x5=120

Μεταθέσεις

- **Μεταθέσεις** των ν στοιχείων ενός συνόλου είναι το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε τα ν στοιχεία σε μια σειρά
- Οι μεταθέσεις των ν στοιχείων δίνονται από το ν!
- Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάλουμε 4 άτομα σε μια σειρά

$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

Διατάξεις με επανάληψη

- Διάταξη με επανάληψη των ν στοιχείων ενός συνόλου ανά κ λέγεται κάθε επιλογή των κ στοιχείων από τα ν όπου το κάθε ένα στοιχείο μπορεί να επαναλαμβάνεται μέχρι και κ φορές.
- Οι διατάξεις των ν στοιχείων ανά κ συμβολίζονται με n^k
- Θέλουμε να βρούμε πόσοι τριψήφιοι αριθμοί σχηματίζονται με τα ψηφία 2,3,4 και 7

$$4^3 = 64$$

Διατάξεις

- Διατάξεις των ν στοιχείων ενός συνόλου ανά κ λέγονται οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να πάρουμε τα κ στοιχεία από τα ν και να τα τοποθετήσουμε σε μια σειρά
- Για κ=ν οι διατάξεις ισούνται με τις μεταθέσεις
- Οι διατάξεις δίνονται από τον τύπο

$$D_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Σε έναν αγώνα δρόμου συμμετέχουν 15 αθλητές. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να έχω την τριάδα των νικητών

- Η πρώτη θέση μπορεί να συμπληρωθεί με 15 τρόπους
- Η δεύτερη θέση μπορεί να συμπληρωθεί με 14 τρόπους
- Η τρίτη θέση μπορεί να συμπληρωθεί με 13 τρόπους
- επομένως, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, το σύνολο των τρόπων είναι 13x14x15=2730

- Διαφορετικά, μπορώ να πάρω 3 αθλητές από τους 15 και να τους κατατάξω με

$$D_3^{15} = \frac{15!}{(15-3)!} = \frac{12! \times 13 \times 14 \times 15}{12!} = 13 \times 14 \times 15 = 2730$$

Συνδυασμοί

- Συνδυασμοί των ν στοιχείων ανά κ λέγεται κάθε υποσύνολο κ στοιχείων από το σύνολο των ν στοιχείων
- οι συνδυασμοί των ν στοιχείων ανά κ συμβολίζονται με $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- Με πόσους τρόπους μπορώ να πάρω 2 από τα 3 γράμματα Α,Β,Γ.
- Μπορώ με 3 τρόπους ΑΒ,ΑΓ,ΒΓ
- Διαφορετικά, οι συνδυασμοί των 3 στοιχείων ανά 2

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{2!3}{2!1} = 3$$

Διαφορές μεταξύ διατάξεων και συνδυασμών

- Έστω από 3 άτομα Α, Β και Γ, διαλέγω τα 2
- **<u>Διάταξη</u>**: με ενδιαφέρει η σειρά των ατόμων. Η σειρά επιλογής Α,Β είναι διαφορετική από τη σειρά Β,Α
- **<u>Συνδυασμοί</u>**: Δεν με ενδιαφέρει η σειρά με την οποία επιλέγω τα άτομα. Η σειρά Α,Β είναι ίδια με την Β,Α

- Διατάξεις 3 ανά 2:

ΑΒ,ΒΑ,ΑΓ,ΓΑ,ΒΓ,ΓΒ

$$D_2^3 = \frac{3!}{(3-2)!} = 3! = 6$$

- Συνδυασμοί 3 ανά 2

ΑΒ,ΑΓ,ΒΓ

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{2!3}{2!1} = 3$$

Από 5 μαθηματικούς και 7 φυσικούς, με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω 3 μαθηματικούς και 4 φυσικούς;

- τους 3 μαθηματικούς μπορώ να τους επιλέξω με $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{3!x4x5}{3!2!} = \frac{4x5}{2} = 10$ τρόπους
- τους 4 φυσικούς μπορώ να τους επιλέξω με

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{4!x5x6x7}{4!3!} = \frac{5x6x7}{6} = 35$$

- Επομένως σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, μπορώ να επιλέξω με $\binom{5}{3} x \binom{7}{4} = 35x10 = 350$ τρόπους

Τρίγωνο πασκάλ

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
$$

- Μια φοιτήτρια μπορεί να απαντήσει σε 7 από τις 10 ερωτήσεις ενός διαγωνίσματος. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να επιλέξει σε ποιές ερωτήσεις να απαντήσει; Ποιές είναι οι επιλογές της αν υποχρεούται να απαντήσει στην πρώτη και τρίτη ερώτηση;

- Πόσους αναγραμματισμούς μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας (όλα) τα γράμματα της λέξης ‘πόρτα’;

- Σε μια τάξη 30 μαθητών υπάρχουν 10 αγόρια και 20 κορίτσια, με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε μια πενταμελή επιτροπή που να αποτελείται από 2 αγόρια και 3 κορίτσια;

Έστω ότι έχω ένα δοχείο με 5 μπάλες, 3 άσπρες και 2 μαύρες. Παίρνω στην τύχη 3 μπάλες. Ποιά είναι η πιθανότητα να πάρω 2 άσπρες

$$\frac{\text{πλήθος ευνοικών προς το Α ενδεχομένων}}{\text{πλήθος δυνατών ενδεχομένων}}$$

πλήθος δυνατών περιπτώσεων $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{3! \times 4 \times 5}{3! \times 2!} = 10$

Η διαδικασία με την οποία μπορώ να πάρω τις ευνοικές περιπτώσεις χωρίζεται σε 2 στάδια, στο να πάρω 2 άσπρες μπάλες και στο να πάρω μια μαύρη

Το πρώτο στάδιο (να πάρω 2 άσπρες) μπορεί να γίνει με $\binom{3}{2} = 3$ τρόπους

Το δεύτερο στάδιο μπορεί να γίνει με $\binom{2}{1} = 2$ τρόπους

Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, πλήθος ευνοικών περιπτώσεων $\binom{3}{2} \times \binom{2}{1}$

Επομένως $P(A) = \dfrac{\binom{3}{2} \times \binom{2}{1}}{\binom{5}{3}} = \dfrac{6}{10}$

- Ένας παίχτης Λόττο επιλέγει 6 αριθμούς από ένα σύνολο 49 αριθμών. Ποιά είναι η πιθανότητα ότι θα επιλέξει 4 από τους 6 τυχερούς αριθμούς

Πλήθος ευνοικών περιπτώσεων : να επιλέξει 4 από τους 6 τυχερούς αριθμούς και 2 από τους 43 μη τυχερούς αριθμούς

Να επιλέξει 4 από τους 6 τυχερούς αριθμούς : $\binom{6}{4}$ τρόπους

Να επιλέξει 2 από τους 43 μη τυχερούς αριθμούς: $\binom{43}{2}$ τρόπους

Πλήθος ευνοικών περιπτώσεων : Να κάνει και τα 2 ταυτόγχρονα $\binom{6}{4} \times \binom{43}{2}$ τρόπους

Πλήθος δυνατών περιπτώσεων : Το πλήθος των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορεί να επιλέξει 6 από τους 49 αριθμούς : $\binom{49}{6}$ τρόπους

Ζητούμενη πιθανότητα $\dfrac{\binom{6}{4} \times \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}}$

Ένα διαγώνισμα έχει 10 ερωτήσεις με 2 πιθανές επιλογές (σωστό-λάθος). Ένας μαθητής απαντάει στην τύχη. Ποιά είναι η πιθανότητα να απαντήσει σε όλες σωστά

- Πλήθος ευνοικών περιπτώσεων:

Να απαντήσει σε όλες σωστά=1

Πλήθος δυνατών περιπτώσεων

$$2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^{10}$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα

$$\frac{1}{2^{10}}$$