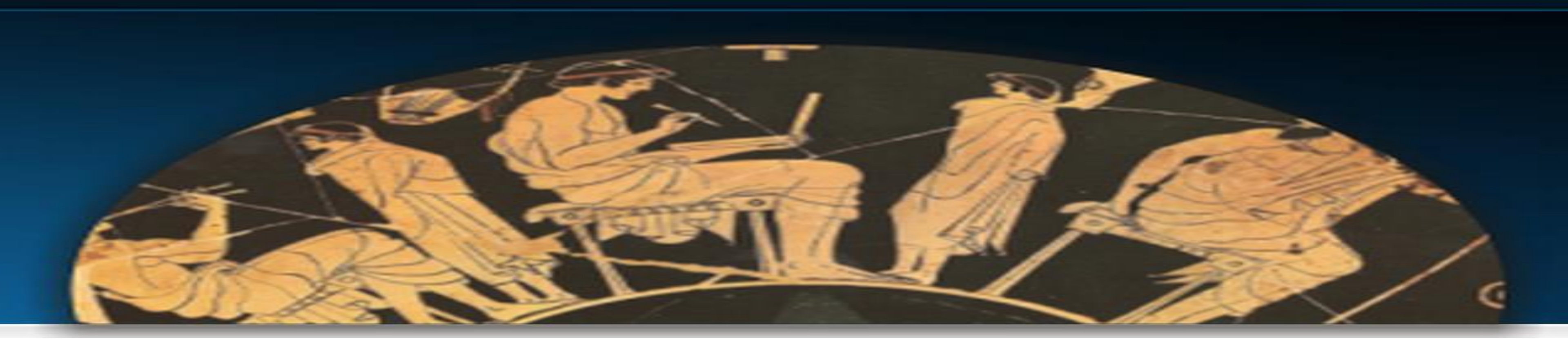
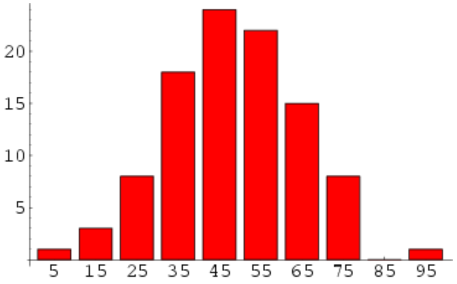


Κατανομή πιθανότητας τυχαίας μεταβλητής – κατανομές διακριτών τυχαίων μεταβλητών

Δημήτρης Μαυρίδης

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων



Κατανομή πιθανότητας

Η κατανομή πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής αποτελείται από τις τιμές της τυχαίας μεταβλητής και τις αντίστοιχες πιθανότητες με τις οποίες εμφανίζονται αυτές οι τιμές

π.χ. Η ρίψη ενός αμερόληπτου νομίσματος

Πιθανές τιμές (κορώνα, γράμματα)

Πιθανότητα κάθε ενδεχομένου 0.5

Επομένως

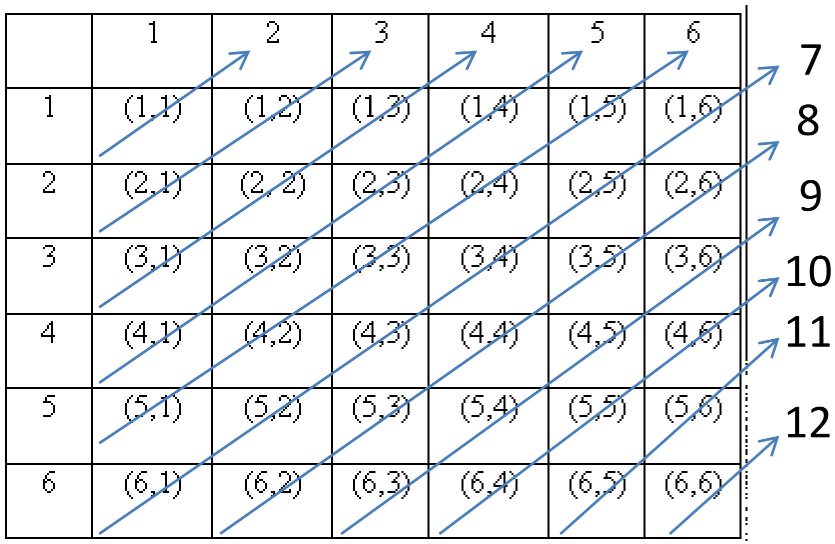
Τιμές	Πιθανότητες
Κορώνα	0.5
Γράμματα	0.5

Κατανομή πιθανότητας

- Ρίψη ενός ζαριού

Τιμές	Πιθανότητες
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

Άθροισμα ρίψης 2 ζαριών



	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2, 2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Σύνολο δυνατών περιπτώσεων : 36

Τιμές α	Πιθανότητα	Αθροιστική Πιθανότητα
2	1/36	1/36
3	2/36	3/36
4	3/36	6/36
5	4/36	10/36
6	5/36	15/36
7	6/36	21/36
8	5/36	26/36
9	4/36	30/36
10	3/36	33/36
11	2/36	35/36
12	1/36	1

Κατανομή πιθανότητας

- Έστω η παρακάτω κατανομή του αριθμού παιδιών ανα παντρεμένο ζευγάρι

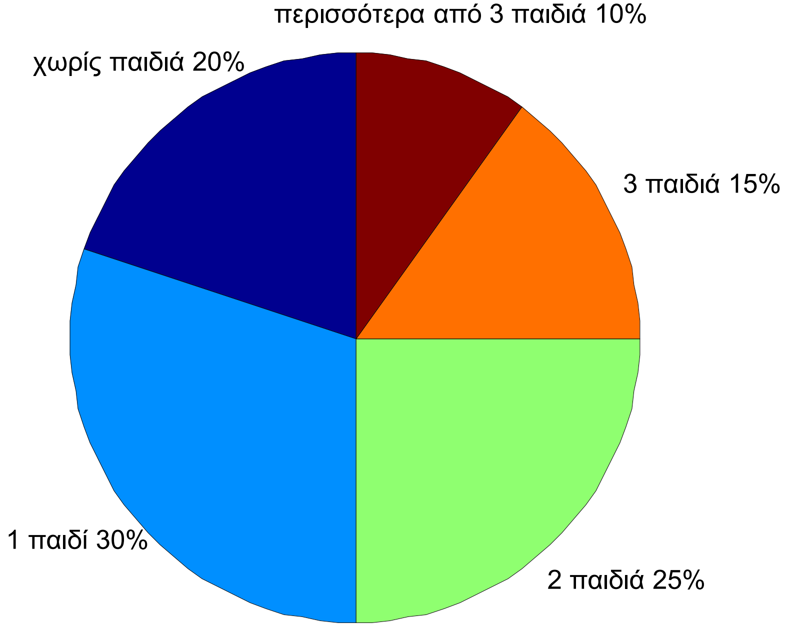
Αριθμός παιδιών	0	1	2	3
πιθανότητα	0.2	0.3	0.25	0.15

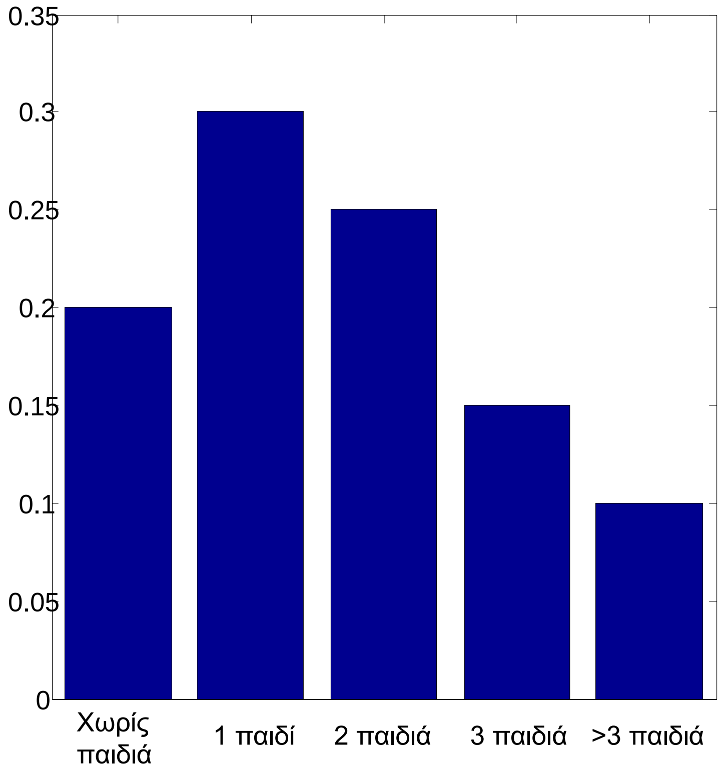
Για να έχω την κατανομή μιας τυχαίας μεταβλητής, θα πρέπει να έχω όλες τις πιθανές τιμές της, και οι πιθανότητες εμφάνισης αυτών των τιμών θα πρέπει να αθροίζουν στη μονάδα

$$\sum P(X = x_i) = 1$$

Αριθμός παιδιών	0	1	2	3	>3
πιθανότητα	0.2	0.3	0.25	0.15	0.1

Γραφήματα για ποιοτικές





Αναμενόμενη τιμή

- Η τιμή που αναμένουμε για την τυχαία μας μεταβλητή σε μια σειρά επαναλήψεων του τυχαίου πειράματος

- Αν έχω μια σειρά από τιμές $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$E(X) = \sum x_i \times P(X = x_i)$$

Αναμενόμενη τιμή ρίψης ζαριού

Τιμές x_i	Πιθανότητες $P(X = x_i)$	$x_i \times P(X = x_i)$
1	$\frac{1}{6}$	$1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$2 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$
3	$\frac{1}{6}$	$3 \times \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$
4	$\frac{1}{6}$	$4 \times \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$
5	$\frac{1}{6}$	$5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$
6	$\frac{1}{6}$	$6 \times \frac{1}{6} = \frac{6}{6}$
Αναμενόμενη τιμή		$\frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$

Ποιά είναι η αναμενόμενη βαθμολογία για έναν μαθητή που απαντάει στη τύχη σε ένα διαγώνισμα που έχει 10 ερωτήσεις με 3 πιθανές επιλογές η κάθε μια αν η σωστή απάντηση πιάνει 3 μονάδες και η λάθος αφαιρεί μια μονάδα

- Από κάθε ερώτηση, ο μαθητής είτε θα κερδίσει 3 μονάδες, είτε θα χάσει μια μονάδα
- Αφού απαντάει στην τύχη, η πιθανότητα να απαντήσει σωστά είναι 1/3 και η πιθανότητα να απαντήσει λαθεμένα είναι 2/3
- Επομένως, η κατανομή των βαθμών που παίρνει από 1 ερώτηση είναι

$$E(X) = (-1) \times \frac{2}{3} + 3 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Βαθμοί	Πιθανότητες
-1	2/3
3	1/3

Επομένως, στις 10 ερωτήσεις, η αναμενόμενη βαθμολογία είναι

$$10 \times \frac{1}{3} \cong 3{,}33$$

Γενική περίπτωση : 1 ερώτηση έχει κ επιλογές. Η σωστή απάντηση δίνει μ βαθμούς ενώ η λάθος αφαιρεί ν βαθμούς. Ποιά είναι η αναμενόμενη βαθμολογία για κάποιον που απαντάει στην τύχη.

Βαθμοί	**Πιθανότητα**
μ	$\frac{1}{\kappa}$
$-\nu$	$\frac{\kappa - 1}{\kappa}$

$$\mathrm{E(X)} = \mu \times \frac{1}{\kappa} - \nu \times \frac{\kappa - 1}{\kappa} = \frac{\mu - \nu \times (\kappa - 1)}{\kappa}$$

Μια εταιρεία θέλει να κάνει μια επένδυση 100 χιλ ευρώ. Πραγματοποίησε μια μελέτη και εκτιμά ότι αν πραγματοποιήσει την επένδυση τότε με πιθανότητα 0.2 θα έχει κέρδη 30 χιλ, με πιθανότητα 0.5 θα έχει κέρδη 90 χιλ και με πιθανότητα 0.3 θα έχει κέρδη 210 χιλ. Ποιό είναι το αναμενόμενο κέρδος αν η εταιρεία πραγματοποιήσει την επένδυση

- Έστω X το κέρδος της εταιρείας

Κέρδος σε χιλ ευρώ	Πιθανότητες
-70	0.2
-10	0.5
110	0.3

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = (-70) \times 0{,}2 + (-10) \times 0{,}5 + 110 \times 0{,}3 = 14$$

Μια ρουλέτα έχει 18 κόκκινους, 18 μαύρους αριθμούς και το 0. Ένας παίχτης ποντάρει συνεχώς 1 ευρώ σε 1 αριθμό. Αν κερδίσει θα πάρει 36 ευρώ

Κέρδος	Πιθανότητα
35	1/37
-1	36/37

$$\mathrm{E(X)} = 35 \times \frac{1}{37} - 1 \times \frac{36}{37} = -\frac{1}{37}$$

Κάθε φορά που ποντάρει χάνει κατά μέσο όρο 1/37 ευρώ

Πείραμα Bernoulli

- Ένα τυχαίο πείραμα λέγεται πείραμα Bernoulli, αν καταλήγει σε ένα από δυο ξένα μεταξύ τους ενδεχόμενα
- Η γέννηση ενός παιδιού (φύλο)
- Το στρίψιμο ενός νομίσματος
- Αν το αποτέλεσμα σε ένα διαγώνισμα ήταν επιτυχές ή όχι
- Αν το ζάρι έφερε αριθμό μεγαλύτερο του 4 ή όχι

- Συμβατικά, ένα από τα δυο ενδεχόμενα ονομάζεται ‘επιτυχία’ και παίρνει την τιμή 1 και το άλλο ‘αποτυχία’ και παίρνει την τιμή 0

Κατανομή Bernoulli

$$P(X = 1) = p$$ πιθανότητα επιτυχίας *p*
$$P(X = 0) = 1 - p$$

Η αναμενόμενη τιμή ισούται με την πιθανότητα επιτυχίας

$$E(X) = \sum x_i \times P(X = x_i) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p$$

Έστω X το αποτέλεσμα της ρίψης ενός νομίσματος.
Έστω ‘κορώνα’=1 και ‘γράμματα’=0

$$P(X = 1) = \frac{1}{2}$$
$$P(X = 0) = \frac{2}{2}$$

Έστω ένα σύνολο από ερωτήσεις. Η πιθανότητα να απαντήσει σωστά ένας μαθητής 1 ερώτηση είναι σταθερή, ανεξάρτητα από την ερώτηση, και ίση με 0.7

- Κάθε ερώτηση είναι ένα πείραμα Bernoulli
- Επιτυχία θεωρούμε τη σωστή απάντηση

$$P(X=1)=0.7$$
$$P(X=0)=0.3$$

- Ποιά είναι η πιθανότητα να απαντήσει σωστά για πρώτη φορά στην τρίτη ερώτηση
- Θέλουμε 2 αποτυχίες και μετά μια επιτυχία ΛΛΣ
- Έστω Λ_i το ενδεχόμενο να απαντήσει λάθος (αποτυχία) στην *i* ερώτηση και Σ_i το ενδεχόμενο να απαντήσει σωστά (επιτυχία)

$$P(\Lambda_1 \cap \Lambda_2 \cap \Sigma_3) = \mathrm{P}(\Lambda_1) \times P(\Lambda_2) \times P(\Sigma_3) = (1-\mathrm{p}) \times (1-p) \times p = (1-p)^2 \times p$$

- Έστω Υ ο αριθμός των δοκιμών μέχρι την πρώτη επιτυχία
  $P(Y=3)= 0.3^2 \times 0.7 = 0.063$

Γεωμετρική κατανομή

- Έστω y ο αριθμός δοκιμών Bernoulli μέχρι την πρώτη επιτυχία (πιθανότητα επιτυχίας=p)

$P(y = k) = (1-p)^{k-1} \times p$ όπου k = 1,2, 3 ….

Ένας επαγγελματίας καλαθοσφαιριστής έχει ποσοστό ευστοχίας στα τρίποντα 40%. Η ικανότητα του να πετύχει ένα τρίποντο δεν εξαρτάται από το πόσες προσπάθειες έχει κάνει.

- Να βρεθεί η πιθανότητα να ευστοχήσει για πρώτη φορά στην τέταρτη προσπάθεια
- Έστω y ο αριθμός των προσπαθειών μέχρι την πρώτη επιτυχία (εύστοχο τρίποντο)
- Η πιθανότητα επιτυχίας είναι p=0.4

$$P(y=4) = (1-p)^3 \times p = 0{,}6^3 \times 0{,}4 = 0{,}0864$$

- Να βρεθεί η πιθανότητα να αστοχήσει για πρώτη φορά στην τέταρτη προσπάθεια
- Έστω y ο αριθμός των προσπαθειών μέχρι την πρώτη επιτυχία (άστοχο τρίποντο)
- Η πιθανότητα επιτυχίας είναι p=0.6

$$P(y=4) = (1-p)^3 \times p = 0{,}4^3 \times 0{,}6 = 0{,}0384$$

Διωνυμική κατανομή

- Εκφράζει τον αριθμό των επιτυχιών σε n ανεξάρτητες δοκιμές ενός πειράματος Bernoulli
- Έστω πείραμα Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p. Ποιά είναι η πιθανότητα να έχω 2 επιτυχίες σε 3 δοκιμές ενός πειράματος
- Θέλω 2 επιτυχίες και 1 αποτυχία. Αφού οι δοκιμές είναι ανεξάρτητες

$$p^2 \times (1-p)$$

- Αλλά μπορώ να έχω 2 επιτυχίες με περισσότερους από 2 τρόπους (ΕΕΑ,ΕΑΕ,ΑΕΕ)

$$P(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2 \cap \mathrm{A}_3) + \mathrm{P}(\mathrm{E}_1 \cap A_2 \cap E_3) + P(A_1 \cap E_2 \cap E_3) = 3 \times p^2 \times (1-\mathrm{p})$$

- Μπορώ να έχω 2 επιτυχίες στις 3 δοκιμές με $\binom{3}{2}$ τρόπους
- Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(y=2) = \binom{3}{2} \times p^2 \times (1-p)$

Διωνυμική κατανομή

Έστω Y ο αριθμός επιτυχιών σε n ανεξάρτητες δοκιμές ενός πειράματος Bernoulli

$$P(Y = x) = \binom{n}{x} \times p^x \times (1-p)^{n-x}$$

Όπου n=1,2,3… και x=0,1,2…,n

Ανεξάρτητες δοκιμές σημαίνει ότι η μια δεν εξαρτάται από την άλλη και ότι το **p παραμένει σταθερό σε όλες τις δοκιμές**

Ισχύει $E(X) = n \times p$

Λόττο

- Έστω ένα σύνολο 49 αριθμών από τους οποίους επιλέγω τους 6 και 6 αριθμοί κερδίζουν
- Η επιλογή ενός αριθμού είναι πείραμα Bernoulli
- Η πιθανότητα επιτυχίας δεν παραμένει σταθερή
- Ξεκινώ με πιθανότητα $\frac{6}{49}$ να βρω ενάν τυχερό αριθμό. Αν ο πρώτος αριθμός που επιλέξω είναι τυχερός τότε η πιθανότητα για τον δεύτερο γίνεται $\frac{5}{48}$ διαφορετικά γίνεται $\frac{6}{48}$

Έστω x ο αριθμός των φορών που έρχεται κορώνα σε 3 ρίψεις ενός νομίσματος. Να βρεθεί η κατανομή του x;

- Πρέπει να βρω τι τιμές παίρνει το x και με τι πιθανότητα
- Έχω 3 ρίψεις ενός νομίσματος. Επομένως το x παίρνει τιμές από 0 έως 3
- Θεωρώ το αποτέλεσμα ρίψης ‘κορώνα’ως επιτυχία
- Κάθε ρίψη είναι ένα πείραμα Bernoulli
- Ο αριθμός επιτυχιών σε συγκεκριμένο αριθμό δοκιμών Bernoulli ακολουθεί τη Διωνυμική κατανομή

Τιμή	Πιθανότητα
0	$P(X=0)=\binom{3}{0}\times 0.5^{0}\times 0.5^{3}=0.125$
1	$P(X=1)=\binom{3}{1}\times 0.5^{1}\times 0.5^{2}=0.375$
2	$P(X=2)=\binom{3}{2}\times 0.5^{2}\times 0.5^{1}=0.375$
3	$P(X=3)=\binom{3}{3}\times 0.5^{3}\times 0.5^{0}=0.125$

Ποιά είναι η πιθανότητα να παρατηρήσω τουλάχιστον 1 κορώνα;

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0.125 = 0.875$$

Έστω ένα διαγώνισμα με 4 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής με 5 επιλογές η κάθε μια. Να βρεθεί η κατανομή των σωστών απαντήσεων για ένα μαθητή που απαντάει στην τύχη

Τιμή	Πιθανότητα
0	$P(X=0)=\binom{4}{0}\times 0.2^{0}\times 0.8^{4}=0.4096$
1	$P(X=1)=\binom{4}{1}\times 0.2^{1}\times 0.8^{3}=0.4096$
2	$P(X=2)=\binom{4}{2}\times 0.2^{2}\times 0.8^{2}=0.1536$
3	$P(X=3)=\binom{4}{3}\times 0.2^{3}\times 0.8^{1}=0.0256$
4	$P(X=4)=\binom{4}{4}\times 0.2^{4}\times 0.8^{0}=0.0016$

Ποιός είναι ο αναμενόμενος αριθμός σωστών απαντήσεων

$$\mathrm{E(X)}=\mathrm{n}\times p=4\times 0.2=0.8$$