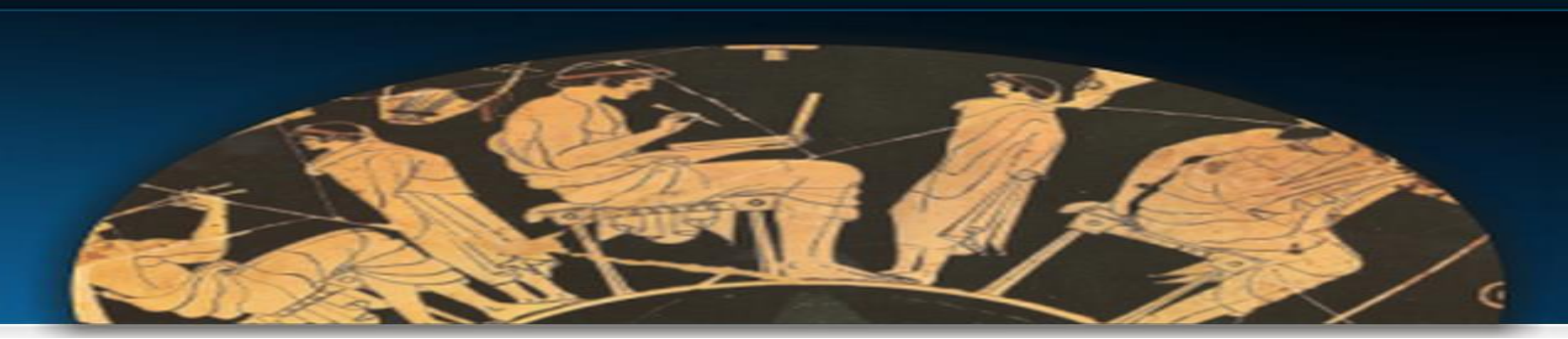
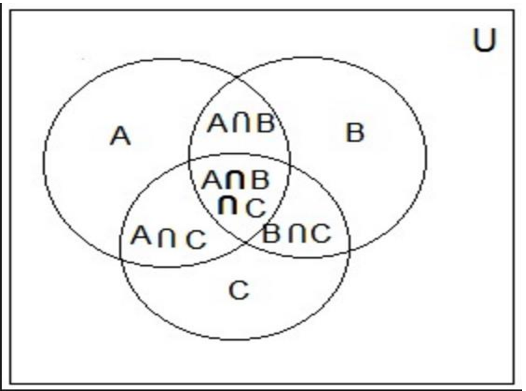


Επαναληπτικό μάθημα
Συνδυαστική - Πιθανότητες

Δημήτρης Μαυρίδης

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων



Συνδυαστική

- **<u>Πολλαπλασιαστική αρχή</u>**: Αν μια διαδικασία χωρίζεται σε ν φάσεις που μπορούν να εκτελεστούν με $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\nu$ τρόπους αντίστοιχα, τότε η διαδικασία μπορεί να εκτελεστεί με $\mu_1 \times \mu_2 \times \cdots \times \mu_\nu$ τρόπους συνολικά
- Αν ο ν είναι μη αρνητικός ακέραιος, τότε το γινόμενο $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times \nu$ συμβολίζεται ν! και ονομάζεται ‘ν παραγοντικό’
- **Μεταθέσεις** των ν στοιχείων ενός συνόλου είναι το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε τα ν στοιχεία σε μια σειρά. Οι μεταθέσεις των ν στοιχείων δίνονται από το ν!
- Διατάξεις των ν στοιχείων ενός συνόλου ανά κ λέγονται οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να πάρουμε τα κ στοιχεία από τα ν και να τα τοποθετήσουμε σε μια σειρά. Οι διατάξεις δίνονται από τον τύπο

$$\Delta^{\nu}_{\kappa} = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}$$

- Συνδυασμοί των ν στοιχείων ανά κ λέγεται κάθε υποσύνολο κ στοιχείων από το σύνολο των ν στοιχείων. Οι συνδυασμοί των ν στοιχείων ανά κ συμβολίζονται με

$$\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu!}{\kappa! \times (\nu-\kappa)!}$$

- Πρωταρχικές έννοιες: Πείραμα τύχης, δειγματικός χώρος, ενδεχόμενο
- Κλασσικός ορισμός πιθανότητας

$$P(A) = \frac{\text{πλήθος ευνοικών προς το A ενδεχομένων}}{\text{πλήθος δυνατών ενδεχομένων}}$$

- Πρώτο αξίωμα: η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α είναι ένας μη-αρνητικός αριθμός $P(A \geq 0)$
- Δεύτερο αξίωμα: Δεν υπάρχουν ενδεχόμενα που δεν περιλαμβάνονται στο δειγματικό χώρο $P(\Omega = 1)$
- Τρίτο αξίωμα: αν έχουμε μια σειρά ενδεχομένων αμοιβαίως αποκλειόμενων μεταξύ τους τότε η πιθανότητα να συμβεί τουλάχιστον ένα από αυτά (ή διαφορετικά η ένωσή τους) ισούται με

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \Gamma \cup \cdots) = P(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) + \mathrm{P}(\Gamma) + \cdots$$

- Ένωση ενδεχομένων U: τουλάχιστον 1 από τα 2 ενδεχόμενα

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap B)$$

- Συμπληρωματικό ενδεχομένου: να μη συμβεί το ενδεχόμενο

$$P(A') = 1 - P(A)$$

- Να μη συμβεί κανένα από τα δυο ενδεχόμενα

$$(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})' = \mathrm{A}' \cap \mathrm{B}'$$

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})' = 1 - P(A \cup B)$$

- Να συμβεί μόνο ένα ενδεχόμενο π.χ. το A

$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}') = \mathrm{P}(\mathrm{A} - \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$

- Να συμβεί ακριβώς ένα από τα 2 ενδεχόμενα (π.χ. Μόνο το A ή μόνο το B αλλά όχι και τα 2 μαζί)

$$P\big((\mathrm{A} \cap \mathrm{B}') \cup (\mathrm{A}' \cap \mathrm{B})\big) = \mathrm{P}\big((\mathrm{A} - \mathrm{B}) \cup (\mathrm{B} - A)\big)$$
$$= \mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$

- Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B})$$

- Ξένα ενδεχόμενα

$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0$$

- Δεσμευμένη πιθανότητα/θεώρημα Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(\mathrm{B}|\mathrm{A}) \times P(\mathrm{A})$$

- Θεώρημα ολικής πιθανότητας (αν $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \dots, \mathrm{B}_\nu$ αποτελούν μια διαμέριση του Ω, τότε

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = P(\mathrm{A}|\mathrm{B}_1) \times P(B_1) + P(\mathrm{A}|\mathrm{B}_2) \times P(B_2) \dots + P(\mathrm{A}|\mathrm{B}_\nu) \times P(B_\nu)$$

4 μηχανήματα A, B, Γ και Δ λειτουργούν ανεξάρτητα με πιθανότητες 0.5, 0.6, 0.7 και 0.8 αντίστοιχα α) Ποιά είναι η πιθανότητα, σε δοσμένη στιγμή, να λειτουργούν και τα 4 μηχανήματα β) να μη λειτουργεί κανένα

- Το ενδεχόμενο να λειτουργούν και τα 4 ταυτόγχρονα μπορεί να εκφραστεί ως

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \Gamma \cap \Delta$$

$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \Gamma \cap \Delta) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) \times \mathrm{P}(\mathrm{B}) \times \mathrm{P}(\Gamma) \times \mathrm{P}(\Delta)$$

$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \Gamma \cap \Delta) = 0.5 \times 0.6 \times 0.7 \times 0.8 = 0.168$$

Το ενδεχόμενο να μη λειτουργεί κανένα μπορεί να εκφραστεί ως

$$\mathrm{A}' \cap \mathrm{B}' \cap \Gamma' \cap \Delta'$$

και η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(\mathrm{A}' \cap \mathrm{B}' \cap \Gamma' \cap \Delta') = \mathrm{P}(\mathrm{A}') \times \mathrm{P}(\mathrm{B}') \times \mathrm{P}(\Gamma') \times \mathrm{P}(\Delta')$$
$$= 0.5 \times 0.4 \times 0.3 \times 0.2 = 0.012$$

Έστω δειγματικός χώρος $\Omega = (\mathrm{\omega}_1, \mathrm{\omega}_2, \mathrm{\omega}_3, \mathrm{\omega}_4)$ με $\omega_i \cap \omega_j = \emptyset\ \forall\ i, j$ ενός πειράματος τύχης

Ισχύει $P(\omega_1) = 2 \times P(\omega_2) = 3 \times P(\omega_3) = 4 \times P(\omega_4)$.

Να βρεθούν οι πιθανότητες όλων των ενδεχομένων

- Από το δεύτερο αξίωμα έχουμε $P(\Omega) = 1$ και από το τρίτο αξίωμα $\Omega = \mathrm{\omega}_1 \cup \mathrm{\omega}_2 \cup \mathrm{\omega}_3 \cup \mathrm{\omega}_4$
- Επομένως

$$P(\Omega) = P(\mathrm{\omega}_1) + P(\mathrm{\omega}_2) + P(\mathrm{\omega}_3) + P(\mathrm{\omega}_4)$$

$$1 = P(\omega_1) + \frac{P(\omega_1)}{2} + \frac{P(\omega_1)}{3} + \frac{P(\omega_1)}{4}$$

$$1 = \frac{25}{12} \times P(\omega_1)$$

$$P(\omega_1) = \frac{12}{25}$$

$P(\omega_2) = \frac{P(\omega_1)}{2} = \frac{6}{25}$ $P(\omega_3) = \frac{P(\omega_1)}{3} = \frac{4}{25}$ $P(\omega_4) = \frac{P(\omega_1)}{4} = \frac{3}{25}$

Έστω Α,Β τα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου με $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$
και $P\big((A \cap B') \cup (A' \cap B)\big) = \frac{1}{4}$

- Να βρεθεί το άθροισμα P(A)+P(B)

$$P\big((A \cap B') \cup (A' \cap B)\big) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

- Να βρεθεί η πιθανότητα να μη συμβούν ταυτόχρονα τα Α,Β

$$P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

Έστω τάξη με 15 αγόρια και 14 κορίτσια. 5 από τα αγόρια και 7 από τα κορίτσια είναι άριστα στα μαθηματικά.

- Να υπολογιστεί η πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγόμενος μαθητής να είναι άριστος στα μαθηματικά και να υπολογιστεί η πιθανότητα κάποιος άριστος μαθητής να είναι αγόρι
- Να σχεδιαστεί ο πίνακας συνάφειας

Έστω Α: το ενδεχόμενο να είναι αγόρι

Ε: το ενδεχόμενο να είναι άριστος στα μαθηματικά $P(A) = \frac{15}{29}, P(\mathrm{A}') = \frac{14}{29}, P(\mathrm{E}|\mathrm{A}) = \frac{5}{15}, P(E|A') = \frac{7}{14}$

$$P(E) = P(E|A) \times P(A) + P(E|A') \times P(A') = \frac{5}{15} \times \frac{15}{29} + \frac{7}{14} \times \frac{14}{29} = \frac{12}{29}$$

$$P(A|E) = \frac{P(E|A) \times P(A)}{P(E)} = \frac{\frac{5}{15} \times \frac{15}{29}}{\frac{12}{29}} = \frac{5}{12}$$

	Αγόρι	Κορίτσι	σύνολο
Μη άριστος	10	7	17
Άριστος	5	7	12
σύνολο	15	14	29

Ένα κουτί περιέχει 4 άσπρες μπάλες, 2 μαύρες μπάλες και 3 κόκκινες μπάλες. Επιλέγω 2 μπάλες στην τύχη. Ποιά είναι η πιθανότητα να επιλέξω

- 2 άσπρες μπάλες $\frac{\binom{4}{2}\times\binom{5}{0}}{\binom{9}{2}}$
- 2 μαύρες μπάλες $\frac{\binom{2}{2}\times\binom{7}{0}}{\binom{9}{2}}$
- Τουλάχιστον 1 άσπρη μπάλα $\frac{\binom{4}{1}\times\binom{5}{1}}{\binom{9}{2}}+\frac{\binom{4}{2}\times\binom{5}{0}}{\binom{9}{2}}$
- Το πολύ 1 άσπρη μπάλα $\frac{\binom{4}{0}\times\binom{5}{0}}{\binom{9}{2}}+\frac{\binom{4}{1}\times\binom{5}{1}}{\binom{9}{2}}$
- 1 άσπρη και 1 κόκκινη μπάλα $\frac{\binom{4}{1}\times\binom{2}{0}\times\binom{3}{1}}{\binom{9}{2}}$

Κατά τη γέννηση ενός παιδιού, η πιθανότητα να έχουμε αγόρι είναι ½. Ποιές από τις παρακάτω ακολουθίες ενδείξεων έχει την μεγαλύτερη πιθανότητα εμφάνισης, θεωρώντας ότι έχουμε οικογένειες με 4 παιδιά

1. ΑΓΑΓ

$$P(A_1 \cap \Gamma_2 \cap \mathrm{A}_3 \cap \Gamma_4) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1) \times P(\Gamma_2) \times P(A_3) \times P(\Gamma_4) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

1. ΑΓΓΑ
2. ΑΑΑΑ
3. ΓΓΓΓ
4. ΑΑΑΓ

Είναι όλα ισοπίθανα

Σε μια διάσκεψη, κάθε παρευρισκόμενος δίνει χειραψία με κάθε άλλον παρευρισκόμενο. Συνολικά δόθηκαν 10 χειραψίες. Πόσα άτομα ήταν στη διάσκεψη;

- Έστω ότι έχουμε ν άτομα
- Ο αριθμός χειραψιών είναι ίσος με τον αριθμό διαφορετικών ζευγαριών ανθρώπων στα ν άτομα
- Επομένως $\binom{\nu}{2} = 10$ $\frac{\nu!}{2!\times(\nu-2)!} = 10$ $\frac{(\nu-2)!\times(\nu-1)\times\nu}{2!(\nu-2)!} = 10$

$$\frac{(\nu-1)\times\nu}{2} = 10$$
$$\nu^2 - \nu - 20 = 0$$
$$\Delta = \beta^2 - 4\times\alpha\times\gamma = 1 - 4\times(-20) = 1 + 80 = 81$$

$$\nu_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2}$$
$$\nu_1 = 5$$
$$\nu_2 = -4$$

- Επομένως ν=5 γιατί δεν μπορώ να έχω αρνητικό αριθμό ατόμων

Ποιά είναι η πιθανότητα σε ένα σύνολο 23 ατόμων να υπάρχουν τουλάχιστον 2 άτομα που θα έχουν γενέθλια την ίδια μέρα;

$$P(A) = \frac{\pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma\ \varepsilon\upsilon\nu o\ddot{\iota}\kappa\acute{\omega}\nu\ \pi\rho o\varsigma\ \tau o\ \mathrm{A}\ \varepsilon\nu\delta\varepsilon\chi o\mu\acute{\varepsilon}\nu\omega\nu}{\pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma\ \delta\upsilon\nu\alpha\tau\acute{\omega}\nu\ \varepsilon\nu\delta\varepsilon\chi o\mu\acute{\varepsilon}\nu\omega\nu}$$

Πλήθος δυνατών περιπτώσεων: 365^{23}

Θα βρω την πιθανότητα να μην έχουν 2 άτομα (1 ζεύγος ατόμων) γενέθλια την ίδια μέρα (συμπληρωματικό του τουλάχιστον ενός ζεύγους ατόμων

Αυτό μπορεί να συμβεί με $\Delta_{23}^{365} = \frac{365!}{(365-23)!} = \frac{365!}{342!} = 343 \times 344 \times \cdots \times 365$

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι $1 - \frac{343\times364\times\cdots\times365}{365^{23}} \cong 0.51$