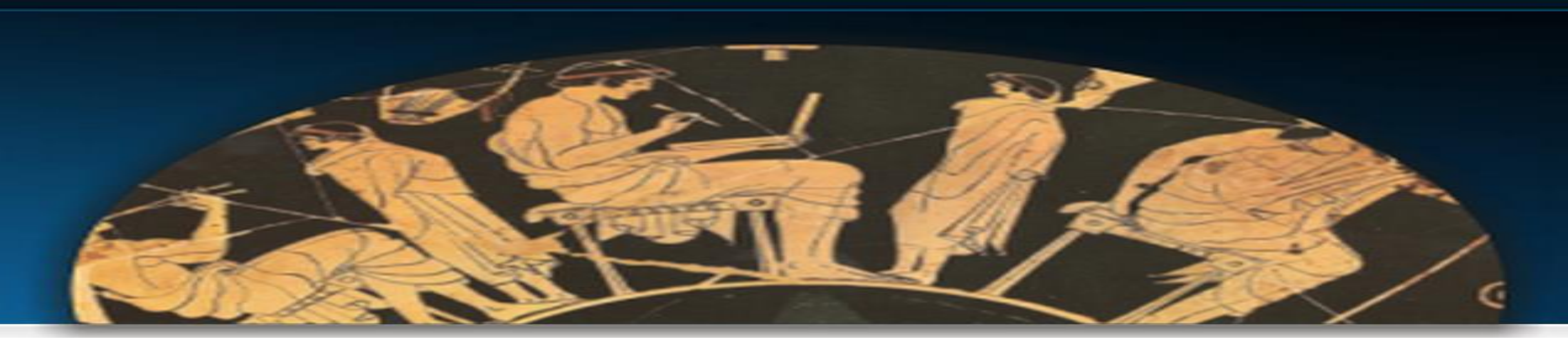
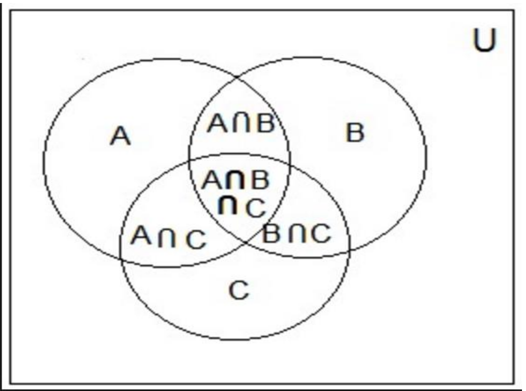


Εισαγωγή στις πιθανότητες- διαγράμματα Venn

Δημήτρης Μαυρίδης

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων



Εισαγωγή στις πιθανότητες

Η θεωρία πιθανοτήτων δεν είναι τίποτα περισσότερο από την μετατροπή της κοινής λογικής σε μαθηματικά. Laplace, *Théorie analytique des probabilités*, 1820

- Τυχαίο πείραμα (random experiment): Ένα τυχαίο πείραμα είναι ένα πείραμα (μπορεί να είναι και παρατήρηση) το οποίο μπορούμε να το επαναλάβουμε πολλές φορές με τις ίδιες συνθήκες χωρίς να γνωρίζουμε το αποτέλεσμα του εκ των προτέρων (a-priori). Το αποτέλεσμα του πειράματος δεν εξαρτάται από προηγούμενα αποτελέσματα του ιδίου πειράματος.
- Παραδειγματα τυχαίων πειραμάτων είναι η ρίψη ενός νομίσματος/κέρματος, η διεξαγωγή μιας ερώτησης, ο αριθμός των ψήφων που παίρνει ένα κόμμα, μια μέτρηση

Δειγματικός χώρος (Sample space)

- Δειγματικός χώρος (Sample space) : Ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων του
- π.χ. όταν ρίχνουμε ένα κέρμα οι δυνατές περιπτώσεις είναι δυο κορώνα ή γράμματα και ο δειγματικός χώρος συμβολίζεται συνήθως με Ω και γράφεται ως $\Omega=\{K, \Gamma\}$.

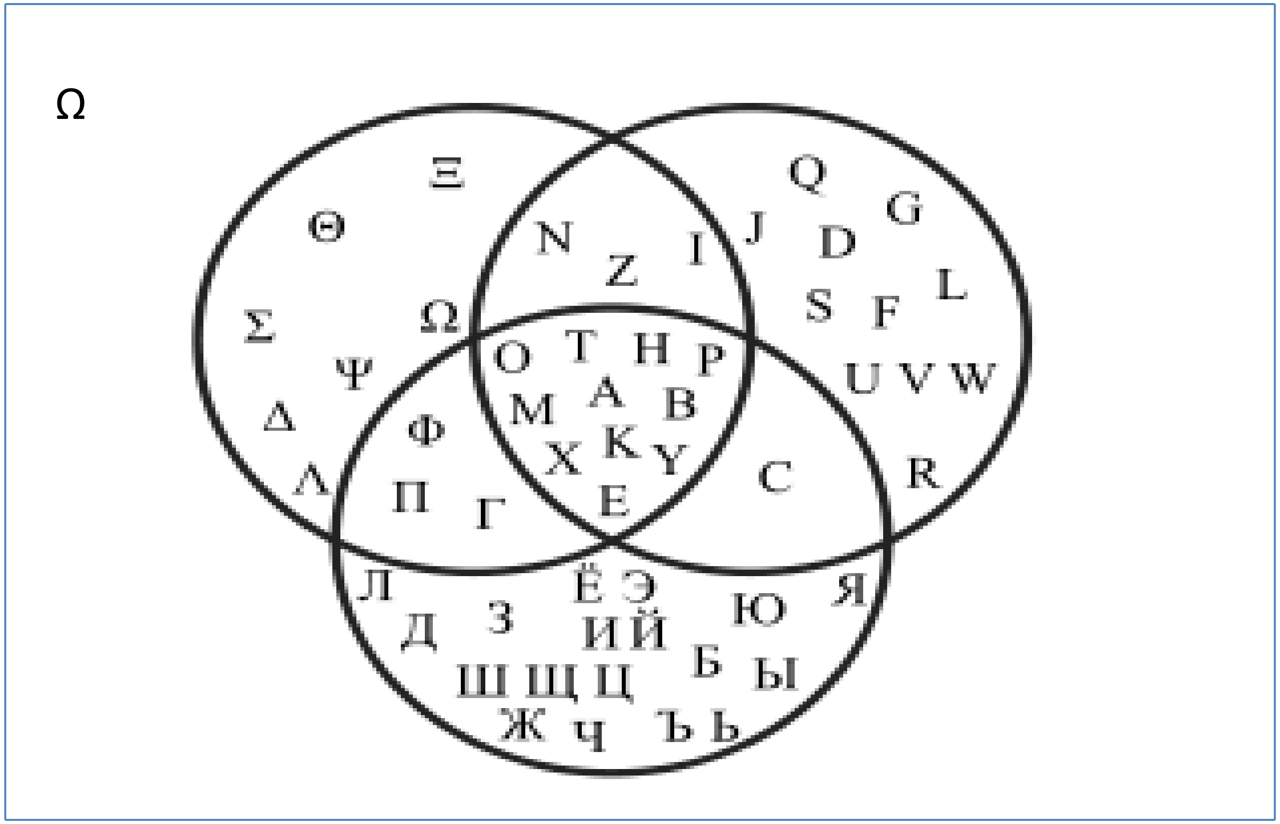
Δειγματικός χώρος για ρίψη 2 ζαριών

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2, 2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Ενδεχόμενο (Event)

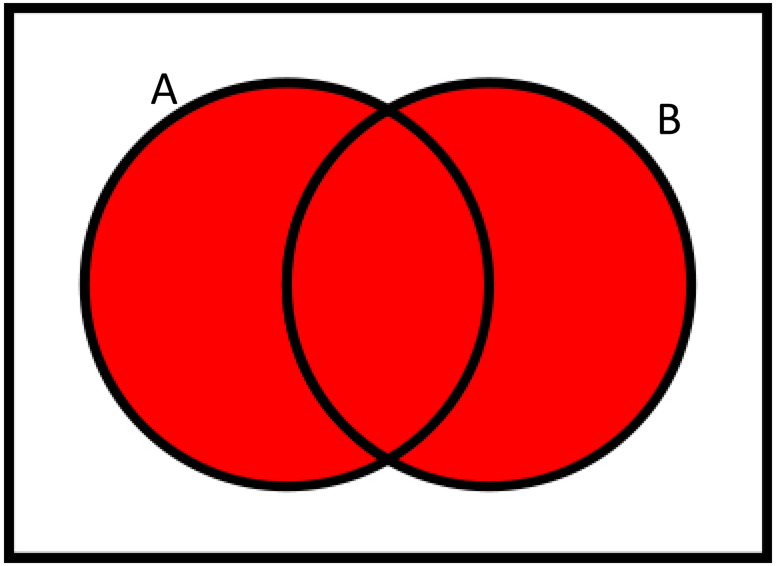
- Ως ενδεχόμενο ορίζουμε ένα υποσύνολο του δειγματικού χώρου π.χ. στο παράδειγμα της ρίψης του νομίσματος έχουμε τα εξής ενδεχόμενα, το αποτέλεσμα της ρίψης του νομίσματος να είναι κορώνα και το αποτέλεσμα της ρίψης του νομίσματος να είναι γράμματα.

Διαγράμματα Venn (Venn diagrams)



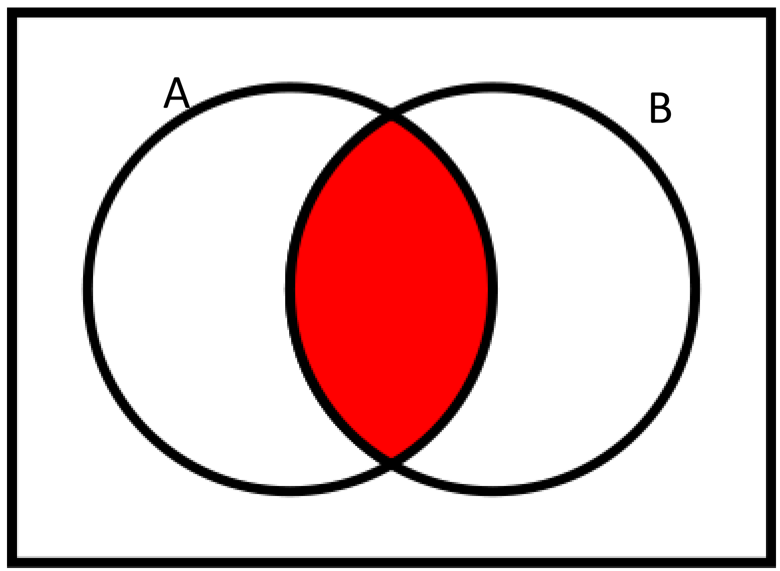
Ένωση ενδεχομένων $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$

- Αν Α, Β είναι δυο ενδεχόμενα του ιδίου δειγματικού χώρου, τότε το ενδεχόμενο να συμβεί τουλάχιστον ένα από τα δυο λέγεται ένωση των Α και Β και συμβολίζεται με $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$



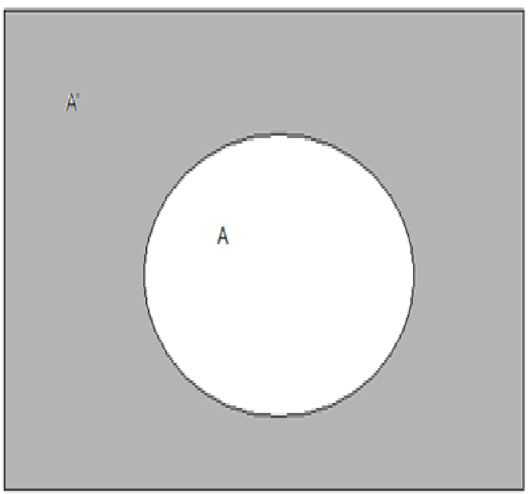
Τομή ενδεχομένων $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$

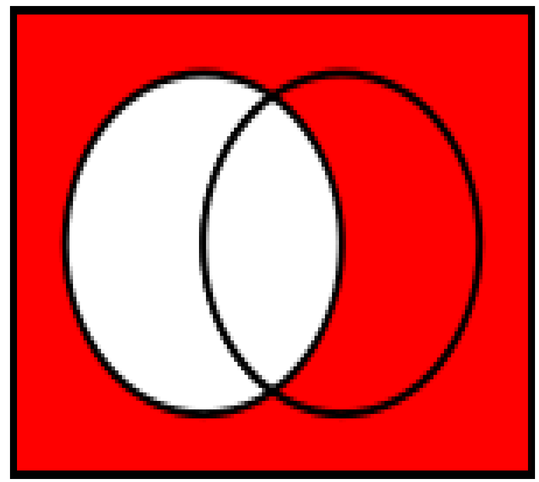
- Το ενδεχόμενο να συμβούν και τα δυο ενδεχόμενα «Α και Β» λέγεται τομή των Α και Β και συμβολίζεται με $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$



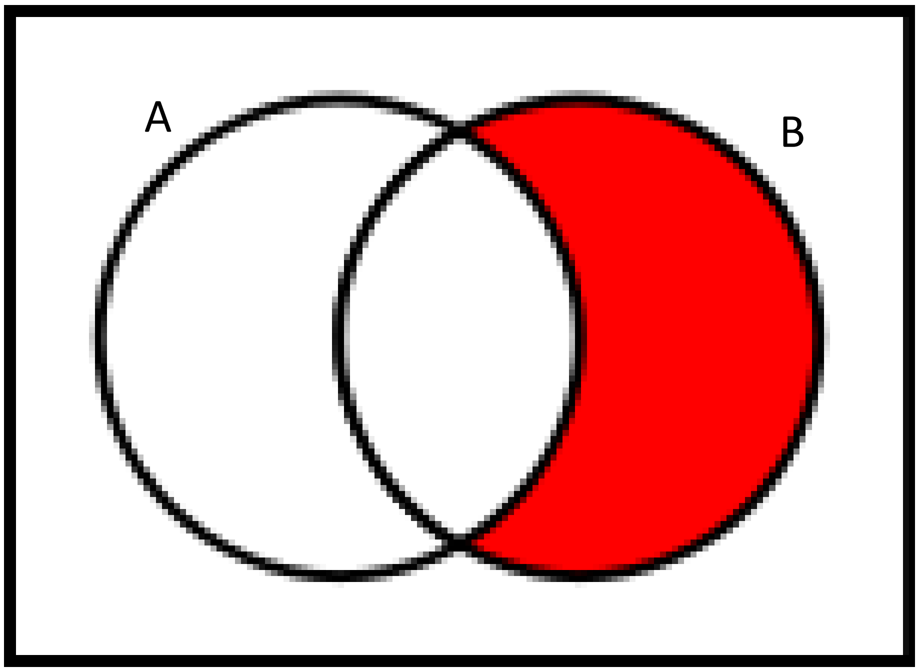
Συμπληρωματικό ενδεχόμενο Α’

- Το ενδεχόμενο να μην συμβεί το ενδεχόμενο Α λέγεται συμπληρωματικό ενδεχόμενο και συμβολίζεται με Α’



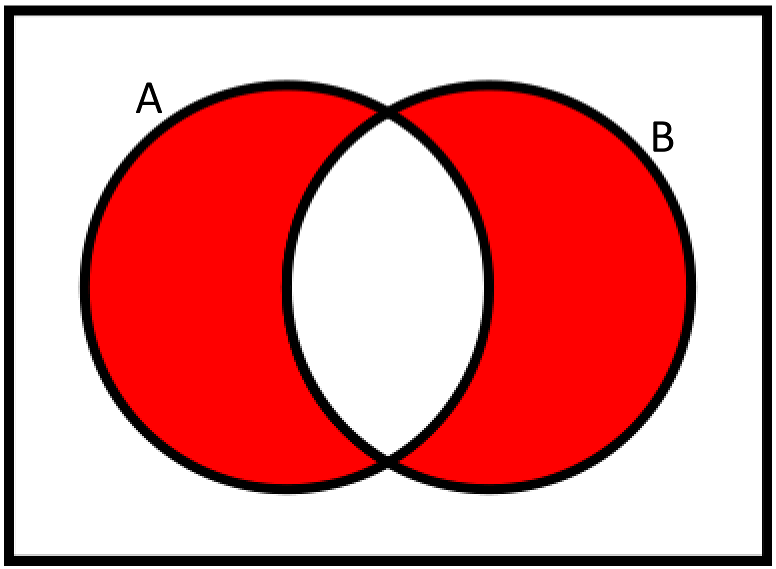


Να συμβεί μόνο το Β, $A' \cap B = B - A$



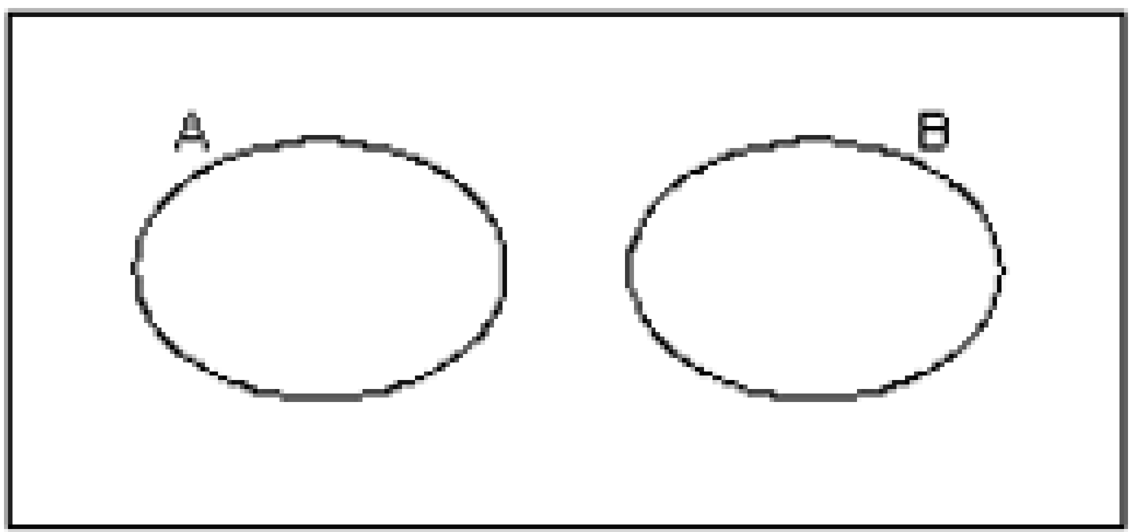
Να συμβεί ή μόνο το Α ή μόνο το Β ακριβώς 1 από τα 2

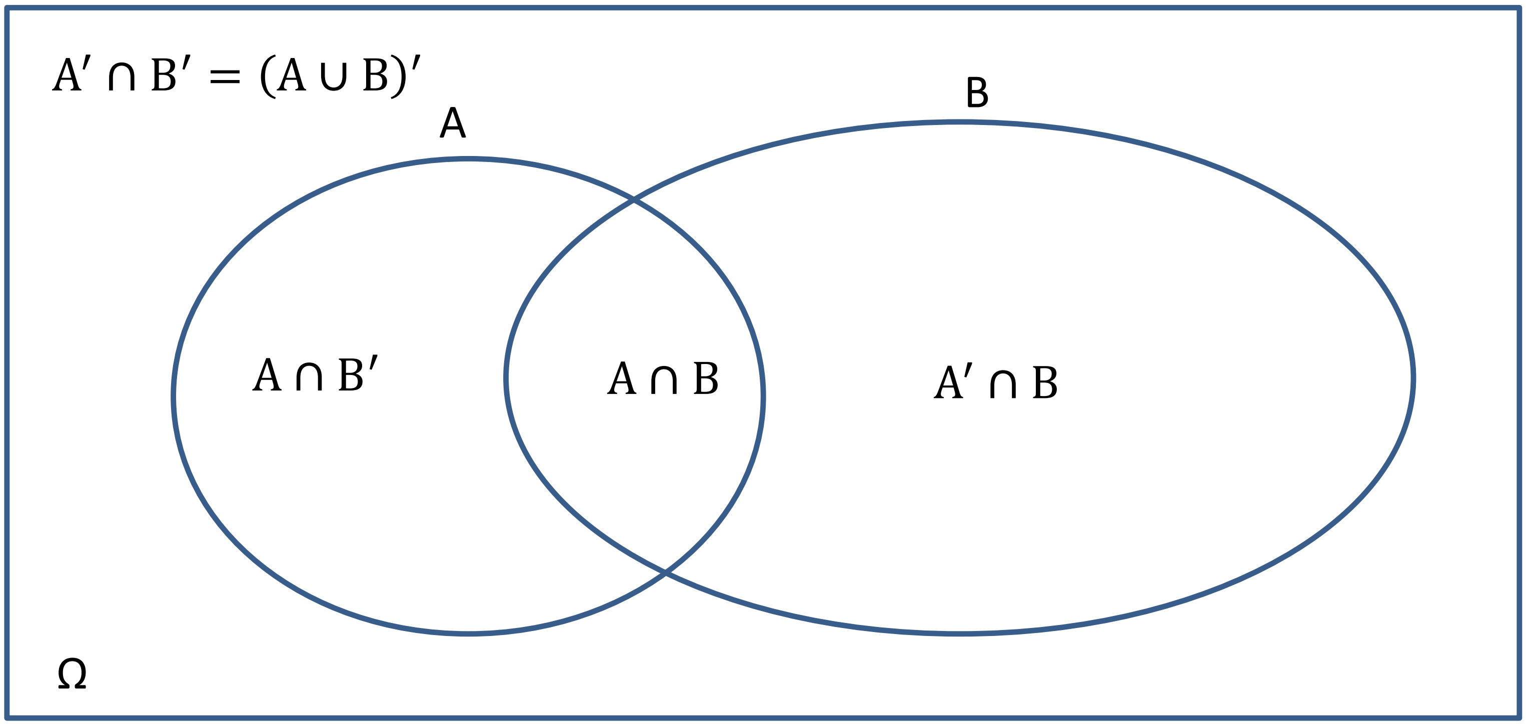
$$(A \cap B') \cup (A' \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$$



Αμοιβαίως αποκλειόμενα ή ξένα ενδεχόμενα, $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$

Τα 2 ενδεχόμενα δεν μπορούν να συμβούν ταυτόγχρονα



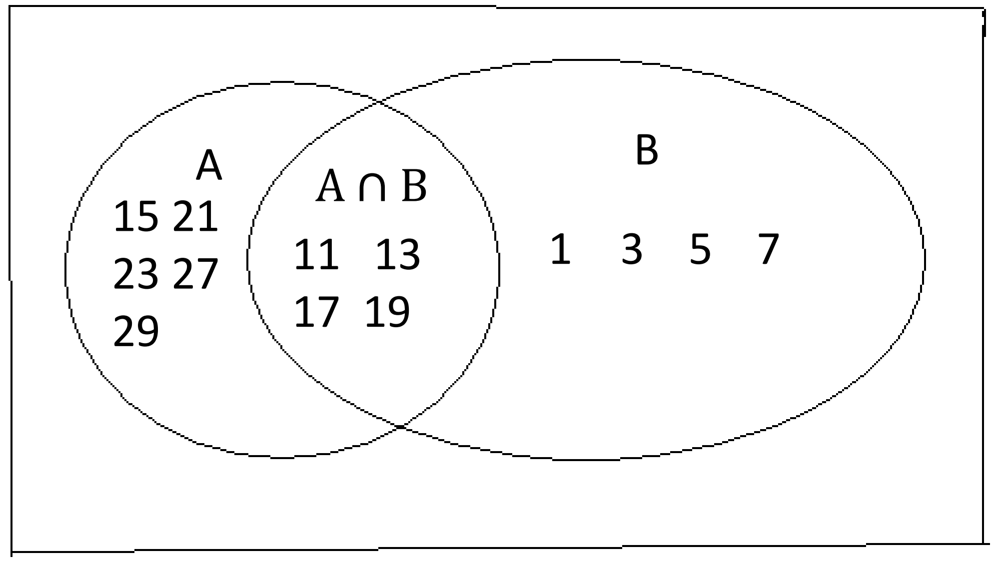


$A' \cap B' = (A \cup B)'$
A
B
$A \cap B'$
$A \cap B$
$A' \cap B$
Ω

Διαγράμμα Venn

Έστω 2 σύνολα αριθμών. Το πρώτο (A) αποτελείται από τους περιττούς αριθμούς από το 11 έως το 30 και το δεύτερο (B) από τους πρώτους αριθμούς από το 1 έως το 22

A={11,13,15,17,19,21,23,25,27,29} B={1,3,5,7,11,13,17,19}



$$A \cap B' = \{15,21,23,27,29\}$$
$$A \cap B = \{11,13,17,19\}$$
$$A' \cap B = \{1,3,5,7\}$$

Αξιωματική θεμελίωση πιθανοτήτων

- Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός $P(A \geq 0)$
- Δεν υπάρχουν ενδεχόμενα που δεν περιλαμβάνονται στο δειγματικό χώρο $P(\Omega = 1)$
- Αν έχουμε μια σειρά αμοιβαίως αποκλειόμενων ενδεχομένων τότε η πιθανότητα να συμβεί τουλάχιστον 1 από αυτά (ή αλλιώς η ένωσή τους) ισούται με

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \Gamma \cup \cdots) = P(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) + \mathrm{P}(\Gamma) + \cdots$$

Κλασσικός ορισμός πιθανότητας

$$P(A) = \frac{\text{πλήθος ευνοικών προς το A ενδεχομένων}}{\text{πλήθος δυνατών ενδεχομένων}}$$

Ποιά είναι η πιθανότητα ένα ζάρι να φέρει αριθμό μικρότερο από 3;

Ευνοικές περιπτώσεις: {1,2}, πλήθος=2

Δυνατές περιπτωσεις: {1,2,3,4,5,6}, πλήθος=6

Πιθανότητα=2/6=1/3

Ποιά είναι η πιθανότητα να φέρει αριθμό μικρότερο από 3 ή μεγαλύτερο από 5.

A: το ενδεχόμενο να φέρει αριθμό μικρότερο από 3

B: το ενδεχόμενο να φέρει αριθμό μεγαλύτερο από 5

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Έκφραση ενδεχομένων ως ένωση άλλων ξένων ενδεχομένων

$$\Omega = A \cup A'$$

$$A = (A \cap B') \cup (A \cap B)$$

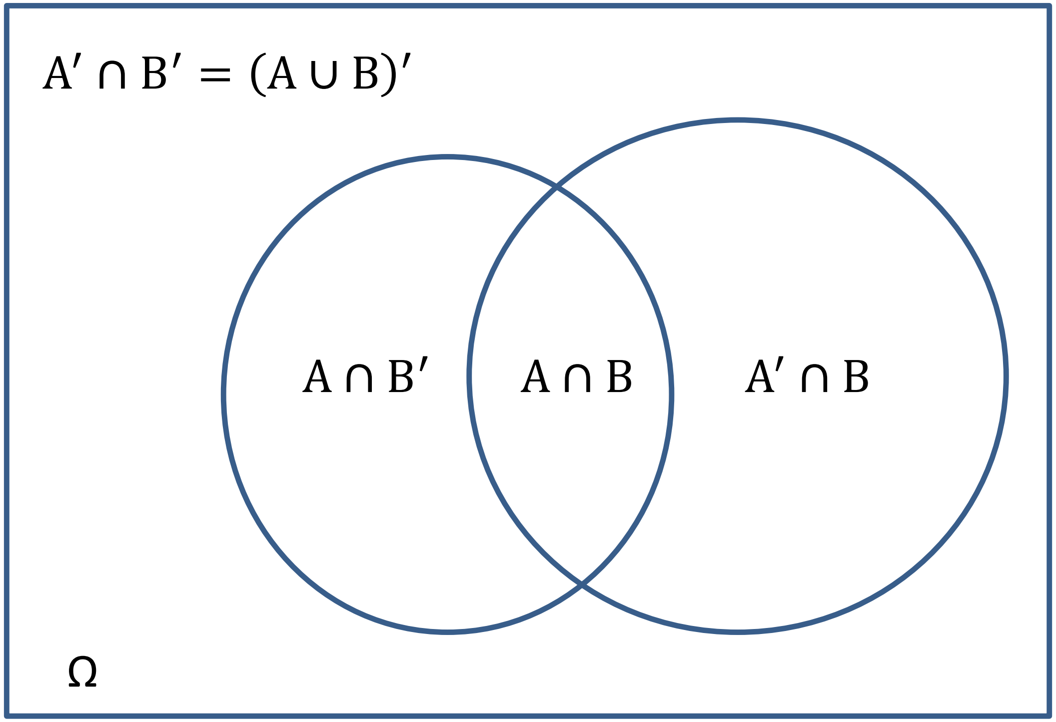
$$B = (A' \cap B) \cup (A \cap B)$$

$$\Omega = (A \cup B) \cup (A \cup B)'$$

$$A \cup B = (A \cap B') \cup B$$

$$A \cup B = (A' \cap B) \cup A$$

$$\Omega = (A \cap B) \cup (A \cap B)'$$

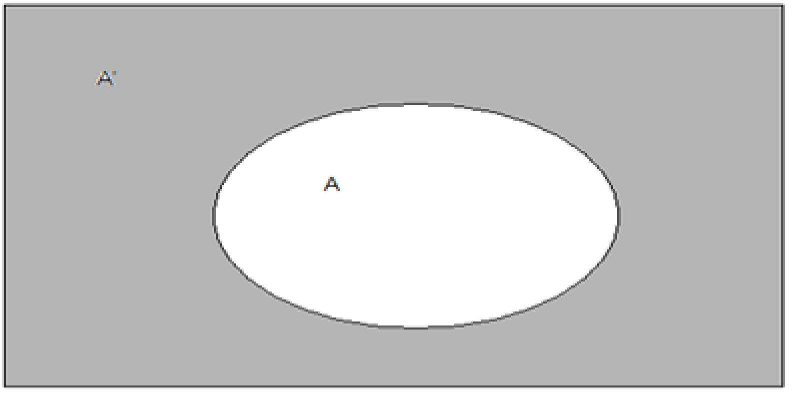


Συμπληρωματικό ενδεχόμενο

$$\Omega = \mathrm{A} \cup \mathrm{A}'$$

Τα Α και Α’ είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα (δεν μπορούν να συμβούν και τα 2 ταυτόγχρονα). Επομένως, σύμφωνα με το 3 αξιωμα του Kolmogorov

$$\mathrm{P}(\Omega) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + P(\mathrm{A}')$$



Σύμφωνα με το 2 αξίωμα του Kolmogorov P(Ω)=1, επομένως

$$\mathrm{P}(\Omega) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + P(\mathrm{A}')$$

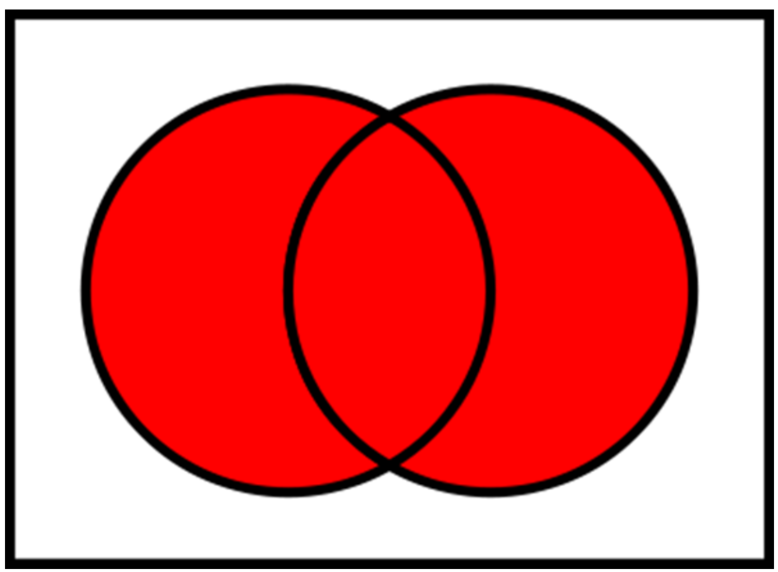
$$1 = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + P(\mathrm{A}')$$
$$P(A') = 1 - P(A)$$

Να μη συμβεί κανένα από τα δυο ενδεχόμενα

$$(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})' = \mathrm{A}' \cap \mathrm{B}'$$

$$\Omega = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cup \mathrm{B})'$$

$$\mathrm{P}(\Omega) = P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) + P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})' \leftrightarrow 1 = P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) + P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})'$$
$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})' = 1 - P(A \cup B)$$



Πιθανότητα να συμβεί το A και όχι το B

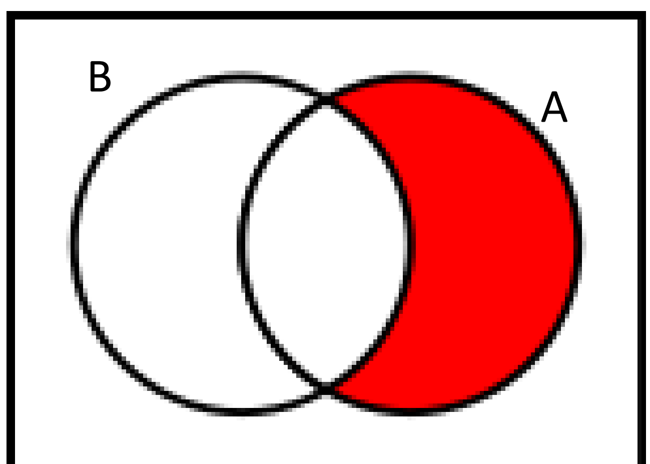
$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}')$$

μπορούμε να γράψουμε το A ως ένωση δυο ξένων ενδεχομένων

$$\mathrm{A} = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}') \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$

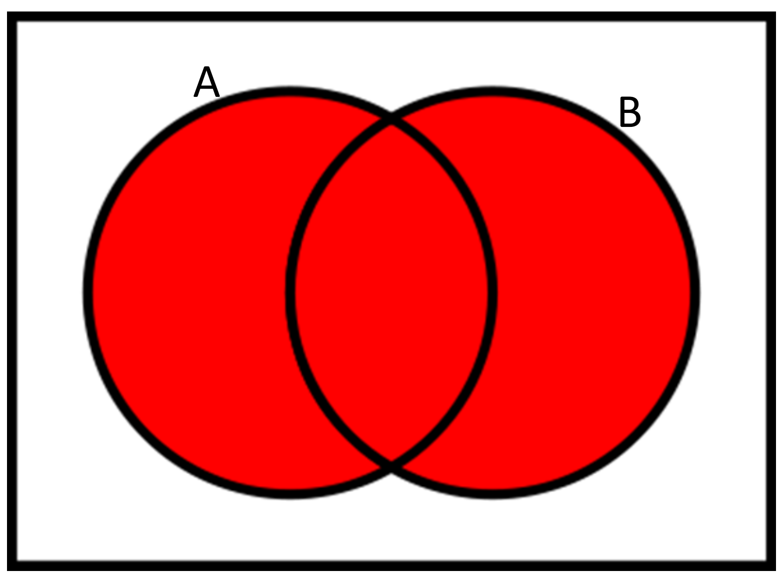
Και σύμφωνα με το 3 αξίωμα του Kolmogorov

$$P(\mathrm{A}) = P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}') + \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \leftrightarrow P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}') = P(\mathrm{A}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$



Ένωση ενδεχομένων

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = (\mathrm{A}' \cap \mathrm{B}) \cup \mathrm{A}$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}' \cap \mathrm{B}) + P(\mathrm{A})$$
$$\mathrm{P}(A \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap B)$$



Σύνοψη (για 2 ενδεχόμενα)

- Ένωση ενδεχομένων : τουλάχιστον 1 από τα 2 ενδεχόμενα
$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap B)$$
- Συμπληρωματικό ενδεχομένου π.χ. : να μη συμβεί το ενδεχόμενο
$$P(A') = 1 - P(A)$$
- Να μη συμβεί κανένα από τα δυο
$$P((A \cup B)') = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$$
- Να συμβεί μόνο ένα ενδεχόμενο π.χ. Το Β
$$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$
- Να συμβεί ακριβώς ένα από τα 2 ενδεχόμενα (π.χ. Μόνο το Α ή μόνο το Β αλλά όχι και τα 2 μαζί)

$$P\big((A \cap B') \cup (A' \cap B)\big) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$$

- Σε ένα σύνολο 200 φοιτητών, οι 138 έχουν δηλώσει ένα μάθημα Ψυχολογίας, 115 έχουν δηλώσει ένα μάθημα Κοινωνιολογίας ενώ οι 91 έχουν δηλώσει και τα δύο. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες ένας τυχαία επιλεγόμενος φοιτητής

- να έχει δηλώσει τουλάχιστον ένα από τα δυο μαθήματα
- να έχει δηλώσει ακριβώς ένα από τα 2 μαθήματα
- Να μην έχει δηλώσει κανένα από τα 2 μαθήματα

Ορισμός ενδεχομένων

Α : να έχει δηλώσει ένα μάθημα Ψυχολογίας

Β : να έχει δηλώσει ένα μάθημα Κοινωνιολογίας

$$P(A) = \frac{138}{200} \qquad P(B) = \frac{115}{200} \qquad P(A \cap B) = \frac{91}{200}$$

- Τουλάχιστον ένα = ένωση

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap B) = \frac{138}{200} + \frac{115}{200} - \frac{91}{200} = \frac{162}{200} = 0.81$$

- Ακριβώς 1 από τα 2

$$P\big((A \cap B') \cup (A' \cap B)\big) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{162}{200} - \frac{91}{200} = \frac{71}{200} = 0.355$$

- Κανένα από τα 2

$$P((A \cup B)') = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 1 - 0.81 = 0.19$$

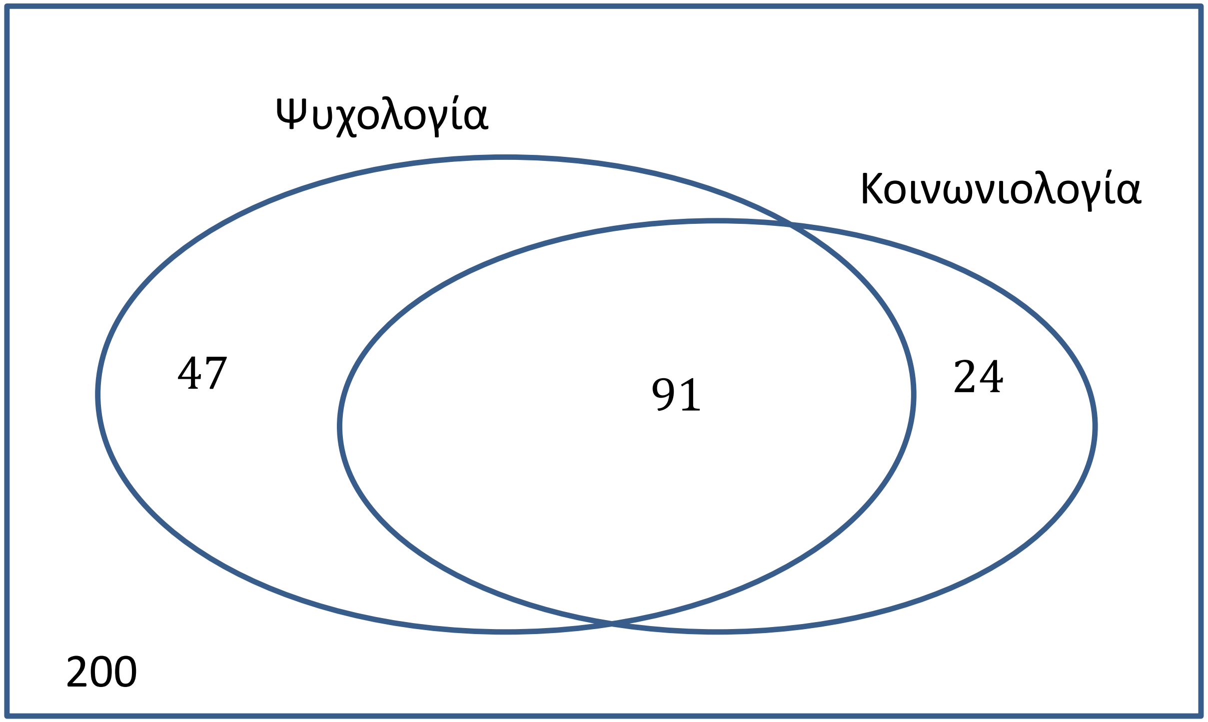
Πίνακας συνάφειας/διπλής εισόδου

	Ψυχολογία		
Κοινωνιολογία	Ναι	Όχι	Σύνολο
Ναι	$91 = A \cap B$		$\mathrm{B} = 115$
Όχι			
Σύνολο	$138 = A$		$\Omega = 200$

Πίνακας συνάφειας/διπλής εισόδου

	Ψυχολογία		
Κοινωνιολογία	Ναι	Όχι	Σύνολο
Ναι	$91 = A \cap B$	$24 = A' \cap B$	$115 = B$
Όχι	$47 = A \cap B'$	$38 = A' \cap B'$	$85 = B'$
Σύνολο	$138 = A$	$62 = A'$	$\Omega = 200$

Διαγράμματα Venn



Ανεξάρτητα ενδεχόμενα –Independent Events

- Μπορούν να συμβούν ταυτόγχρονα αλλά το ένα δεν επηρεάζει το άλλο
- π.χ. αν επιλέξω τυχαία ένα άτομο και μια μέρα, το αν θα βρέξει εκείνη τη μέρα είναι ανεξάρτητο από το φύλο του ατόμου
- Αν τα $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_\nu$ είναι ανεξάρτητα τότε

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_\nu) = P(A_1) \times P(A_2) \times \cdots \times P(A_\nu)$$

Τι πιθανότητα έχουμε ώστε ρίχνοντας ένα ζάρι 2 φορές να εμφανισθεί για πρώτη φορά ο αριθμός 5 στη δεύτερη ρίψη.

- A: το ενδεχόμενο να φέρω 5 στην πρώτη ρίψη
- B: το ενδεχόμενο να φέρω 5 στη δεύτερη ρίψη

- $P(A' \cap B) = P(A') \times P(B) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$

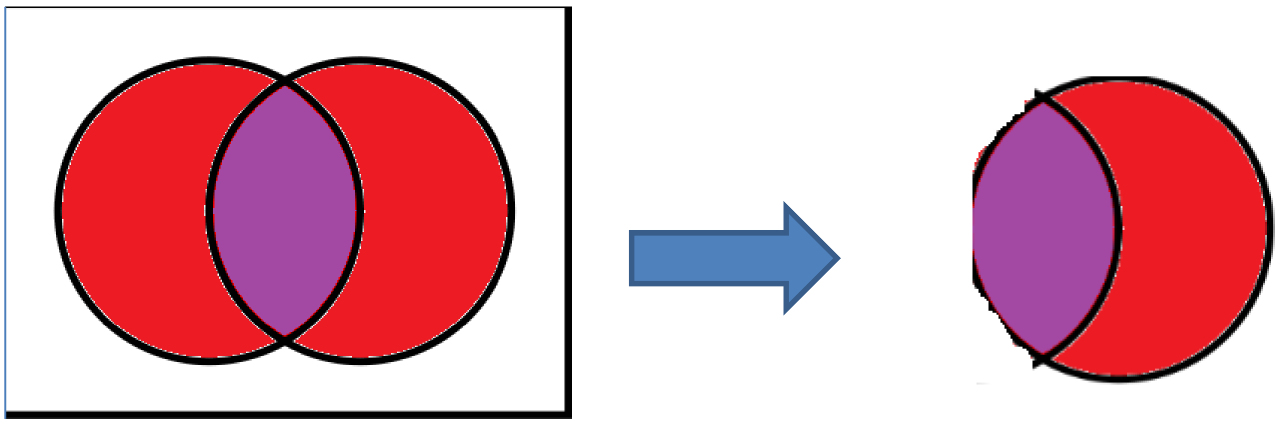
Δεσμευμένη πιθανότητα – Conditional probability

- Δεσμευμένη πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α δοθέντος ενός ενδεχομένου Β είναι η πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο Α όταν γνωρίζουμε ότι έχει ήδη συμβεί το ενδεχόμενο Β. Η δεσμευμένη πιθανότητα δίνεται από τον τύπο

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Δεσμευμένη πιθανότητα

$$\frac{P(A \cap B)}{P(\Omega)} = P(A \cap B) \qquad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



Έστω ότι ρίχνω 2 ζάρια. Ποιά είναι η πιθανότητα να πάρω άθροισμα μεγαλύτερο του 10; Ποιά είναι η πιθανότητα αν ξέρω ότι το πρώτο ζαρί ήρθε 5

A: το ενδεχόμενο να φέρω άθροισμα μεγαλύτερο από 10
B: το ενδεχόμενο το πρώτο ζάρι να είναι 5

Από το δειγματικό χώρο βλέπουμε ότι υπάρχουν 36 δυνατές περιπτώσεις, από τις οποίες οι 3 είναι ευνοικές (5,6), (6,5), (6,6), επομένως

$$P(A) = \frac{3}{36}$$

Επίσης $P(\mathrm{B}) = \frac{1}{6}$

Αν ξέρω ότι έχει συμβεί το B τότε
Ω={(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)}
Πλήθος δυνατών περιπτώσεων: 6
Πλήθος ευνοικών περιπτώσεων: 1 (5,6)

Επομένως $P(A|B) = \frac{1}{6}$

Εναλλακτικά $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2, 2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Θεώρημα ολικής πιθανότητας (Total probability law)

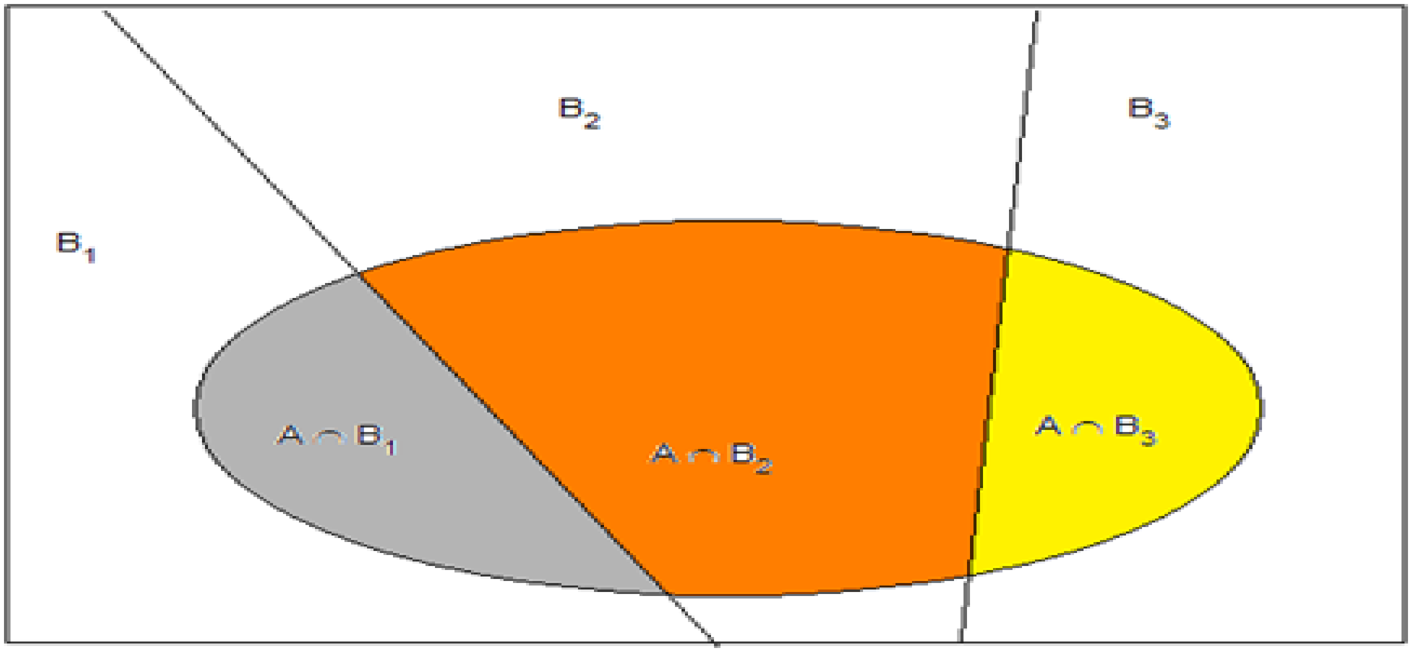
- Τα ενδεχόμενα $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \ldots, \mathrm{B}_\nu$ αποτελούν 1 διαμέριση του δειγματικού χώρου όταν η ενωσή τους μας δίνει το δειγματικό χώρο και είναι μεταξύ τους αμοιβαίως αποκλειόμενα

- Θεώρημα ολικης πιθανότητας : Αν τα ενδεχόμενα $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \ldots, \mathrm{B}_\nu$ αποτελούν μια διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω τότε η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου Α δίνεται από τον τύπο

$$\mathrm{A} = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}_1) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}_2) \cup \cdots \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}_\nu)$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}_1) + P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}_2) + \cdots + \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}_\nu)$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = P(\mathrm{A}|\mathrm{B}_1) \times P(B_1) + P(\mathrm{A}|\mathrm{B}_2) \times P(B_2) \ldots + P(\mathrm{A}|\mathrm{B}_\nu) \times P(B_\nu)$$



$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_\nu)$$

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_\nu)$$

$$P(A) = P(A|B_1) \times P(B_1) + P(A|B_2) \times P(B_2) \ldots + P(A|B_\nu) \times P(B_\nu)$$

Δυο μηχανές εργοστασίου παράγουν το 10% και το 90% αντίστοιχα της παραγωγής ενός αντικειμένου. Είναι γνωστό ότι η πιθανότητα της πρώτης μηχανής να παράγει ελαττωματικό αντικείμενο είναι 0.01 και της δεύτερης είναι 0.05. Ποιά είναι η πιθανότητα ένα τυχαία παραγόμενο προιόν να είναι ελαττωματικό;

- A: το ενδεχόμενο να προέρχεται από την 1 μηχανή
- B: το ενδεχόμενο να προέρχεται από τη 2 μηχανή
- E: το ενδεχόμενο να είναι ελαττωματικό

$P(A) = 0.1 \qquad P(B) = 0.9$

Τα A, B αποτελούν μια διαμέριση του δειγματικού χώρου

$P(E|A) = 0.01 \qquad P(E|B) = 0.05$

$$P(E) = P(E \cap A) + P(E \cap B)$$

$$P(E) = P(E|A) \times P(A) + P(E|B) \times P(B)$$
$$P(E) = 0.01 \times 0.1 + 0.05 \times 0.9 = 0.046$$

Το 5% του πληθυσμού πάσχει από κάποια ασθένεια. Ενα τεστ ανιχνεύει την αρρώστια με πιθανότητα 99% όταν κάποιος πάσχει από την ασθένεια και με πιθανότητα 10% όταν κάποιος δεν πάσχει από την αρρώστια. Δοθέντος ότι το τεστ είναι θετικό, ποιά είναι η πιθανότητα να πάσχει κάποιος από την αρρώστια;

- A : το ενδεχόμενο να νοσεί κάποιος
- E : το ενδεχόμενο το τεστ να ανιχνεύσει την αρρώστια

$$P(A) = 0.05 \qquad P(A') = 1 - P(A) = 0.95$$

$$P(E|A) = 0.99 \qquad P(E|A') = 0.1$$

- Η πιθανότητα το τεστ να είναι θετικό

$$P(E) = P(E \cap A) + P(E \cap A')$$
$$P(E) = P(E|A) \times P(A) + P(E|A') \times P(A')$$

$$P(E) = 0.99 \times 0.05 + 0.1 \times 0.95 = 0.145$$

- Η πιθανότητα να νοσεί κάποιος δοθέντος ότι το τεστ είναι θετικό

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E|A) \times P(A)}{P(E)} = \frac{0.99 \times 0.05}{0.145} = 0.34$$

Έστω ότι έχω ένα δοχείο με 5 μπάλες, 3 άσπρες και 2 μαύρες. Παίρνω στην τύχη 3 μπάλες. Ποιά είναι η πιθανότητα να πάρω 2 άσπρες

$$\frac{\text{πλήθος ευνοικών προς το Α ενδεχομένων}}{\text{πλήθος δυνατών ενδεχομένων}}$$

πλήθος δυνατών περιπτώσεων $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\times(5-3)!} = \frac{3!\times4\times5}{3!\times2} = \frac{20}{2} = 10$

Η διαδικασία με την οποία μπορώ να πάρω τις ευνοικές περιπτώσεις χωρίζεται σε 2 στάδια, στο να πάρω 2 άσπρες μπάλες και στο να πάρω μια μαύρη

Το πρώτο στάδιο (να πάρω 2 άσπρες) μπορεί να γίνει με $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\times(3-2)!} = 3$ τρόπους

Το δεύτερο στάδιο μπορεί να γίνει με $\binom{2}{1} = \frac{2!}{1!\times(2-1)!} = 2$ τρόπους

Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, πλήθος ευνοικών περιπτώσεων $\binom{3}{2} \times \binom{2}{1}$=3$\times$ $2 = 6$

Επομένως $\frac{\binom{3}{2}\times\binom{2}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{6}{10}$

- Ένας παίχτης Λόττο επιλέγει 6 αριθμούς από ένα σύνολο 49 αριθμών. Ποιά είναι η πιθανότητα ότι θα επιλέξει 4 από τους 6 τυχερούς αριθμούς

Πλήθος ευνοικών περιπτώσεων : να επιλέξει 4 από τους 6 τυχερούς αριθμούς και 2 από τους 43 μη τυχερούς αριθμούς

Να επιλέξει 4 από τους 6 τυχερούς αριθμούς : $\binom{6}{4}$ τρόπους

Να επιλέξει 2 από τους 43 μη τυχερούς αριθμούς: $\binom{43}{2}$ τρόπους

Πλήθος ευνοικών περιπτώσεων : Να κάνει και τα 2 ταυτόγχρονα

$\binom{6}{4} \times \binom{43}{2}$τρόπους

Πλήθος δυνατών περιπτώσεων : Το πλήθος των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορεί να επιλέξει 6 από τους 49 αριθμούς : $\binom{49}{6}$ τρόπους

Ζητούμενη πιθανότητα $\frac{\binom{6}{4}\times\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}}$

Ένα διαγώνισμα έχει 10 ερωτήσεις με 2 πιθανές επιλογές (σωστό-λάθος). Ένας μαθητής απαντάει στην τύχη. Ποιά είναι η πιθανότητα να απαντήσει σε όλες σωστά

- Πλήθος ευνοικών περιπτώσεων:

Να απαντήσει σε όλες σωστά=1

Πλήθος δυνατών περιπτώσεων

$$2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^{10}$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα $\frac{1}{2^{10}}$