ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Δημήτρης Μαυρίδης
Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Σε πολλά προβλήματα της στατιστικής πρέπει να απαριθμήσουμε όλους τους δυνατούς τρόπους με τους οποίους μπορεί να παρουσιαστεί μια κατάσταση ή τουλάχιστον να καθορίσουμε τον αριθμό των διαφορετικών περιπτώσεων που υπάρχουν. Ο κλάδος εκείνος των μαθηματικών που ασχολείται με την απαρίθμηση των περιπτώσεων ονομάζεται συνδυαστική
Πολλαπλασιαστική αρχή : Αν μια διαδικασία χωρίζεται σε ν φάσεις που μπορούν να εκτελεστούν με $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_\nu$ τρόπους τότε η διαδικασία μπορεί να εκτελεστεί με $\mu_1 \times \mu_2 \times ... \times \mu_\nu$ τρόπους.

Παράδειγμα: Για τρεις κενές θέσεις σε ένα λύκειο , μιας μαθηματικού, μιας φυσικού και μιας φιλολόγου, υποβάλλουν αίτηση 4, 3 και 7 άτομα αντίστοιχα. Με πόσους τρόπους μπορούν να συμπληρωθούν οι θέσεις.

Με 4 τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε το μαθηματικό, με 3 το φυσικό και με 7 το φιλόλογο. Επομένως μπορούμε να επιλέξουμε τους τρεις καθηγητές με $4 \times 3 \times 7 = 84$ τρόπους.

Παράδειγμα : Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να δώσουμε απαντήσεις σε ένα διαγώνισμα 10 ερωτήσεων τύπου σωστό – λάθος;

Μπορούμε να απαντήσουμε στην πρώτη ερώτηση με 2 τρόπους, ομοίως και για τη δεύτερη, την τρίτη κ.ο.κ. Επομένως το σύνολο των διαφορετικών τρόπων είναι $2 \times 2 \times ... \times 2 = 2^{10} = 1024$

Παραγοντικό (factorial) : Αν ο ν είναι θετικός ακέραιος, το γινόμενο $1 \times 2 \times 3 \times ... \times \nu$ συμβολίζεται με ν! Και διαβάζεται «ν παραγοντικό» π.χ. $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$. Επίσης ορίζουμε 0!=1.

Μεταθέσεις : Μεταθέσεις των ν στοιχείων ενός συνόλου λέγονται οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε σε μια σειρά τα στοιχεία αυτά. Οι μεταθέσεις δίνονται από το ν!.

Παράδειγμα : Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να παρουσιαστούν 5 παίχτες μιας ομάδας καλαθοσφαίρισης στο κοινό;

Πρώτα θα παρουσιαστεί οποιοσδήποτε από τους 5 παίχτες επομένως η πρώτη θέση καλύπτεται με 5 τρόπους, στη συνέχεια θα παρουσιαστεί οποιοσδήποτε από τους εναπομείναντες 4 επομένως η δεύτερη θέση καλύπτεται με 4 τρόπους κ.ο.κ
Οι συνολικοί τρόποι με τους οποίους μπορούν να παρουσιαστούν οι παίχτες είναι $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$

Παράδειγμα: Πόσους τετραψήφιους αριθμούς μπορούμε να φτιάξουμε με τα ψηφία 4,5,1,8 (χρησιμοποιώντας και τα 4 ψηφία).

Το πρώτο ψηφίο μπορεί να συμπληρωθεί με 4 τρόπους, με οποιοδήποτε από τα ψηφία 4,5,1 και 8, το δεύτερο ψηφίο μπορεί να συμπληρωθεί με τρεις τρόπους αφού έχουμε πάρει ένα ψηφίο για το πρώτο ψηφίο παραμένουν τρεις ακόμα αριθμοί. Το τρίτο ψηφίο μπορεί να συμπληρωθεί με δυο αριθμούς και το τελευταίο με 1 αριθμό. Επομένως μπορούμε να φτιάξουμε συνολικά $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$ τετραψήφιους αριθμούς.

Διάταξη με επανάληψη **: Διάταξη με επανάληψη των ν στοιχείων ενός συνόλου ανά κ λέγεται κάθε επιλογή κ στοιχείων από τα ν όπου το καθένα μπορεί να επαναλαμβάνεται μέχρι και κ φορές. Οι διατάξεις των ν στοιχείων ανά κ είναι** $E_k^{\nu} = \nu^k$

Παράδειγμα: Θέλουμε να βρούμε πόσοι τριψήφιοι αριθμοί σχηματίζονται με τα ψηφία 2,3 και 4. Το πρώτο ψηφίο μπορεί να είναι ένας οποιοσδήποτε αριθμός (2,3,4) και επομένως μπορεί να συμπληρωθεί με 3 τρόπους. Το ίδιο ισχύει και για το δεύτερο και το τρίτο ψηφίο. Επομένως οι συνολικοί τριψήφιοι αριθμοί που μπορούμε να σχηματίσουμε είναι $3\times3\times3=3^3$ =27.

Παράδειγμα: Με πόσους τρόπους μπορούν να χωριστούν *k* φοιτητές σε *ν* ομάδες;

Ο πρώτος φοιτητής μπορεί να τοποθετηθεί σε οποιαδήποτε από τις *ν* ομάδες. Ο δεύτερος μπορεί επίσης να τοποθετηθεί σε οποιαδήποτε από τις *ν* ομάδες, … και ο *k*-στος φοιτητής σε οποιαδήποτε από *n* ομάδες.

Άρα υπάρχουν ν^{κ} τρόποι για να τοποθετήσουμε *k* φοιτητές σε *n* ομάδες.

Διατάξεις : Διατάξεις των ν στοιχείων ενός συνόλου ανά κ, λέγονται οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να πάρουμε τα κ στοιχεία από τα ν και να τα τοποθετήσουμε σε μια σειρά. (Για κ=ν έχουμε τις μεταθέσεις των ν στοιχείων). Οι διατάξεις δίνονται από τον τύπο $\Delta_k^{\nu} = \dfrac{\nu!}{k!(\nu-k)!}$

Παράδειγμα: Σε έναν αγώνα δρόμου παίρνουν μέρος 15 αθλητές. Με πόσους τρόπους μπορούμε να έχουμε τους τρεις πρώτους νικητές ;

Κάθε τριάδα νικητών είναι μια διάταξη των 15 αθλητών ανά 3. Επομένως οι δυνατοί τρόποι είναι $\dfrac{15!}{(15-3)!} = \dfrac{12!\times13\times14\times15}{12!} = 2730$. Διαφορετικά μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η πρώτη θέση συμπληρώνεται με 15 τρόπους, η δεύτερη με 14 και η Τρίτη με 13. Επομένως το σύνολο των διαφορετικών τρόπων είναι $13\times14\times15 = 2730$

Συνδυασμός των ν στοιχείων ανά κ λέγεται κάθε υποσύνολο των ν στοιχείων ανά κ. Το πλήθος των συνδυασμών των ν στοιχείων ανά κ συμβολίζεται $\begin{pmatrix}\nu\\k\end{pmatrix}$ και ισούται με $\dfrac{\nu!}{k!(\nu-k)!}$. Αν θέλουμε να επιλέξουμε κ στοιχεία από ν τότε μπορούμε να επιλέξουμε αυτά τα κ άτομα με $\begin{pmatrix}\nu\\k\end{pmatrix}$ τρόπους.

Παράδειγμα 25: Έστω ότι έχουμε 2 άτομα και θέλουμε να βρούμε με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν σε τρεις καρέκλες. Οι τρόποι με τους οποίους μπορούν να καθίσουν είναι οι συνδυασμοί των 3 καρεκλών ανά των 2 ατόμων. Δηλαδή $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \dfrac{3!}{2!(3-2)!} = \dfrac{2!\times3}{2!\times1!} = 3$. Και πράγματι αν αριθμήσουμε τις καρέκλες με Α, Β και Γ τότε οι συνδυασμοί των καρεκλών που μπορούν να καθίσουν οι δυο άνθρωποι είναι οι εξείς τρεις ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ.

Παράδειγμα : ‘Εχουμε ένα σύνολο από 7 άνδρες και 5 γυναίκες. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 2 άνδρες και 3 γυναίκες.

Μπορούμε να επιλέξουμε 2 άνδρες με $\binom{7}{2}$ τρόπους και 3 γυναίκες με $\binom{5}{3}$ τρόπους. Άρα σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε $\binom{7}{2} \times \binom{5}{3}$ διαφορετικούς τρόπους

Για να γίνει κατανοητή η διαφορά μεταξύ των συνδυασμών και των διατάξεων να τονίσουμε ότι οι διατάξεις λαβαίνουν υπόψη τους και την διάταξη των τρόπων. Οι διατάξεις των τριών πρώτων γραμμάτων της αλφαβήτου ανά 2 γράμματα είναι οι ΑΒ, ΒΑ, ΑΓ, ΓΑ, ΒΓ και ΓΒ ενώ οι συνδυασμοί των αντίστοιχων γραμμάτων ανά δυο είναι ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ.

Ο αριθμός των διατάξεων ν αντικειμένων από τα οποία τα ν_1 είναι ενός τύπου, τα ν_2 ενός άλλου τύπου,..., ν_k ενός άλλου τύπου έτσι ώστε $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa = 1$ είναι $\dfrac{\nu!}{\nu_1! \times \nu_2! \times \ldots \times \nu_\kappa!}$

Παράδειγμα : Πόσοι είναι οι αναγραμματισμοί της λέξης ‘στατιστική’

Η λέξη ‘στατιστική’ έχει 3 τ, 2 σ, 2 ι και παό 1 η,κ και α. Οι διαφορετικές λέξεις που μπορούμε να σχηματίσουμε είναι $\dfrac{10!}{3! \times 2! \times 2! \times 1! \times 1! \times 1!} = 151200$διαφορετικές λέξεις.

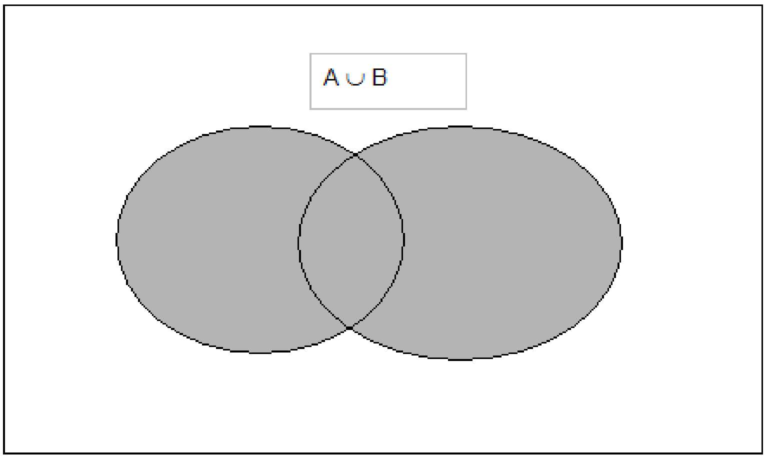
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Τυχαίο πείραμα (random experiment): Ένα τυχαίο πείραμα είναι ένα πείραμα (μπορεί να είναι και παρατήρηση) το οποίο μπορούμε να το επαναλάβουμε πολλές φορές με τις ίδιες συνθήκες χωρίς να γνωρίζουμε το αποτέλεσμα του εκ των προτέρων (a-priori). Το αποτέλεσμα του πειράματος δεν εξαρτάται από προηγούμενα αποτελέσματα του ιδίου πειράματος. Παραδειγματα τυχαίων πειραμάτων είναι η ρίψη ενός νομίσματος, η διεξαγωγή μιας ερώτησης, ο αριθμός των ψήφων που παίρνει ένα κόμμα, τα αν θα βρέξει ή όχι κατά τη διάρκεια της ημέρας κ.α.

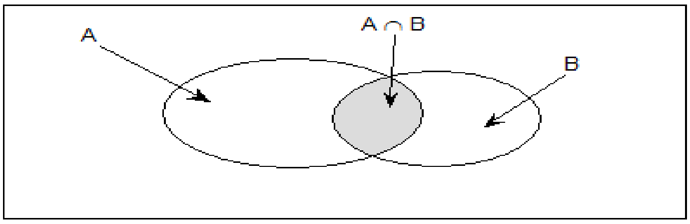
Δειγματικός χώρος (Sample space) : Ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων του π.χ. όταν ρίχνουμε ένα κέρμα οι δυνατές περιπτώσεις είναι δυο κορώνα ή γράμματα και ο δειγματικός χώρος συμβολίζεται συνήθως με Ω και γράφεται ως Ω={Κ, Γ}.

Ενδεχόμενο (Event) : Ως ενδεχόμενο ορίζουμε ένα υποσύνολο του δειγματικού χώρου π.χ. στο παράδειγμα της ρίψης του νομίσματος έχουμε τα εξής ενδεχόμενα, το αποτέλεσμα της ρίψης του νομίσματος να είναι κορώνα και το αποτέλεσμα της ρίψης του νομίζματος να είναι γράμματα.

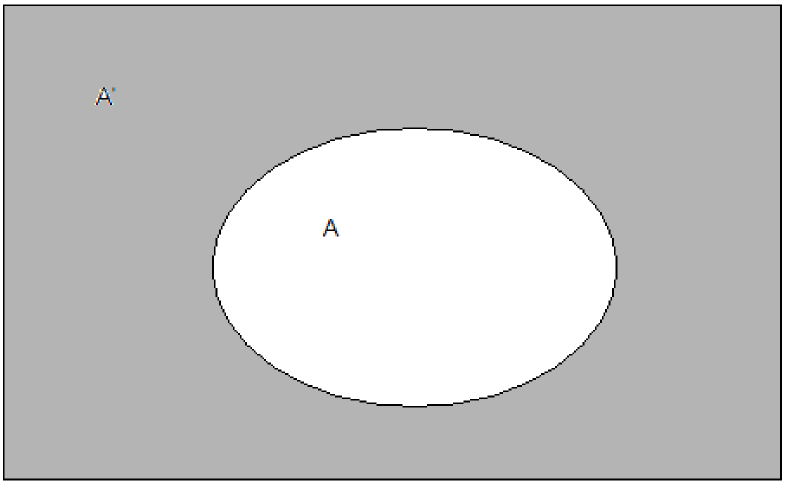
Αν Α, Β είναι δυο ενδεχόμενα του ιδίου δειγματικού χώρου, τότε το ενδεχόμενο να συμβεί τουλάχιστον ένα από αυτά «Α ή Β» λέγεται ένωση των Α και Β και συμβολίζεται με $A \bigcup B$



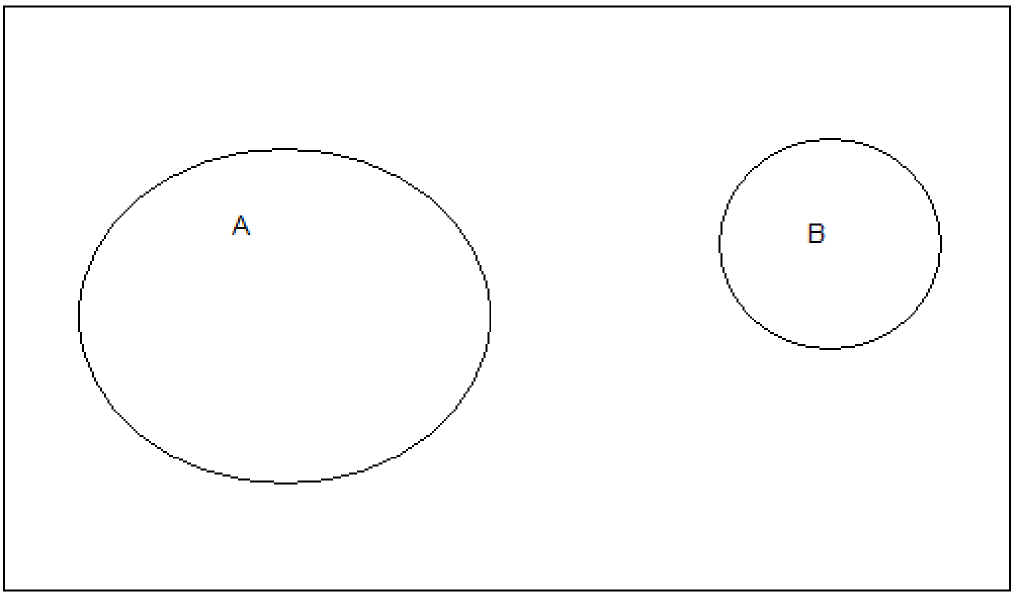
Το ενδεχόμενο να συμβούν και τα δυο ενδεχόμενα «Α και Β» λέγεται τομή των Α και Β και συμβολίζεται με $A \bigcap B$.

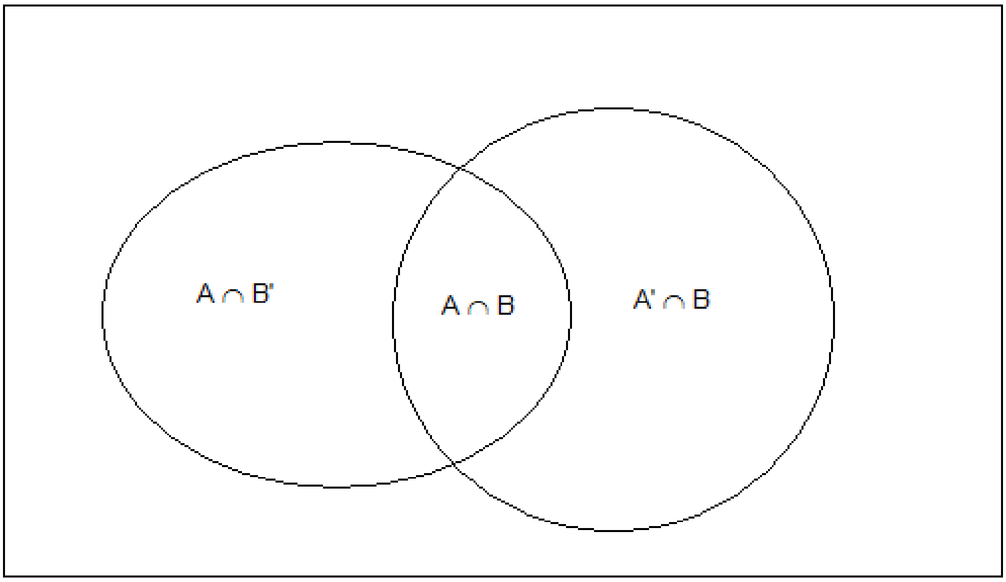


Το ενδεχόμενο να μην συμβεί το ενδεχόμενο Α λέγεται συμπληρωματικό ενδεχόμενο και συμβολίζεται με $A^{'}$



Δυο ενδεχόμενα λέγονται αμοιβαίως αποκλειόμενα ή ξένα μεταξύ τους αν η πραγματοποίηση του ενός αποκλείει την πραγματοποίηση του άλλου π.χ. αν θέλουμε να επιλέξουμε ένα άτομο από ένα πληθυσμό το ενδεχόμενο το άτομο αυτό να είναι άνδρας είναι ξένο με το ενδεχόμενο αυτό το άτομο να είναι γυναικά.





Αξιώματα Kolmogorov

Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός $P(A) \geq 0$

Δεν υπάρχουν ενδεχόμενα που δεν περιλαμβάνονται στον δειγματικό χώρο $P(\Omega) = 1$

Αν έχουμε μια σειρά ενδεχομένων $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ αμοιβαίως αποκλειόμενων μεταξύ τους τότε η πιθανότητα να συμβεί τουλάχιστον ένα από αυτά ή αλλιώς η ένωσή τους ισούται με

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n)$$

Ο κλασσικός ορισμός της πιθανότητας αναφέρεται σε ισοπίθανα ενδεχόμενα και ορίζει ως πιθανότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου (probability of an event) το λόγο του αριθμού των ευνοϊκών για το ενδεχόμενο περιπτώσεων προς το συνολικό αριθμό των περιπτώσεων π.χ. η πιθανότητα να φέρουμε κορώνα στη ρίψη ενός ζαριού είναι ½=0.5 διότι δυο είναι τα δυνατά αποτελέσματα (κορώνα ή γράμματα) και ένα το ευνοϊκό για το ενδεχόμενο αποτέλεσμα (κορώνα).

Μια πιθανότητα είναι πάντοτε μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός και μικρότερη ή ίση της μονάδος. Ένα ενδεχόμενο με μηδενική πιθανότητα λέγεται αδύνατο ενδεχόμενο π.χ. η πιθανότητα να διαλέξω ένα άτομο από ένα γυμνάσιο θηλέων και αυτό να είναι αγόρι είναι 0 διότι δεν υπάρχει καμία ευνοϊκή του ενδεχομένου περίπτωση. Ένα ενδεχόμενο με πιθανότητα 1 λέγεται βέβαιο ενδεχόμενο π.χ. το άτομο που θα διαλέξω από το γυμνάσιο θηλέων να είναι κορίτσι.

Αν έχουμε μια σειρά ενδεχομένων $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ αμοιβαίως αποκλειόμενων μεταξύ τους τότε η πιθανότητα να συμβεί τουλάχιστον ένα από αυτά ή αλλιώς η ένωσή τους ισούται με

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n)$$

Παράδειγμα: Έχουμε 10 σφαιρίδια από τα οποία 3 είναι άσπρα, 2 μαύρα και 5 γαλάζια. Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξουμε ένα σφαιρίδιο και να είναι ή άσπρο ή γαλάζιο.

Έστω A : το ενδεχόμενο το σφαιρίδιο να είναι άσπρο και
B : το ενδεχόμενο το σφαιρίδιο να είναι γαλάζιο
τα δυο ενδεχόμενα είναι ξένα μεταξύ τους αφού η πραγματοποίηση του ενός αποκλείει την πραγματοποίηση του άλλου. Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.3 + 0.5 = 0.8$$

Παράδειγμα : Είναι τα ενδεχόμενα A και B με αντίστοιχες πιθανότητες 0.5 και 0.7 αμοιβαίως αποκλειόμενα

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.5 + 0.7 = 1.2 > 1$ άρ τα δυο ενδεχόμενα δεν είναι ξένα μεταξύ τους

Αν 2 ενδεχόμενα A και B δεν είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα μπορεί να αποδειχτεί με τη χρήση των διαγραμμάτων Venn ότι

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Παράδειγμα : Αν έχουμε δύο ενδεχόμενα A και B με αντίστοιχες πιθανότητες 0.5 και 0.7 και η πιθανότητα να συμβεί τουλάχιστον ένα από τα δυο ενδεχόμενα είναι 0.4 να βρεθεί η πιθανότητα να συμβούν και τα δυο;

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.5 + 0.7 - 0.4 = 0.8$$

Έστω ότι έχουμε μια σειρά ενδεχομένων $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$. Λέμε ότι τα ενδεχόμενα αυτά είναι ανεξάρτητα αν η πραγματοποίηση κάποιου από αυτά δεν επηρεάζει την πραγματοποίηση των άλλων π.χ. το αν είναι κάποιος γαλανομάτης ή όχι είναι ανεξάρτητο από το αν είναι δικηγόρος. Δεν αποκλείεται να είναι γαλανομάτης και δικηγόρος ταυτόχρονα. Τα ανεξάρτητα ενδεχόμενα δεν πρέπει να συγχέονται με τα αμοιβαίως αποκλειόμενα ενδεχόμενα. Αν τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους τότε η πιθανότητα να συμβούν όλα ταυτόχρονα ή αλλιώς η τομή τους είναι

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) \times ... \times P(A_n)$$

Παράδειγμα : Αν P(A)=0.5, P(B)=0.4 και η πιθανότητα να συμβεί τουλάχιστον ένα από αυτά είναι 0.7, να βρεθεί αν τα A, B είναι ανεξάρτητα

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.5 + 0.4 - 0.7 = 0.2$$

Επίσης $\mathrm{P(A) \times P(B) = 0.5 \times 0.4 = 0.2 = P(A \cap B)}$ άρα τα A, B είναι ανεξάρτητα

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ BAYES</u> : Δεσμευμένη πιθανότητα ενός ενδεχομένου A δοθέντος ενός ενδεχομένου B είναι η πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο A όταν γνωρίζουμε ότι έχει συμβεί το ενδεχόμενο B. Η δεσμευμένη πιθανότητα δίνεται από τον τύπο

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A) \times P(A)}{P(B)}$$

Παράδειγμα : Ποιά είναι η πιθανότητα αν ρίξουμε 2 ζάρια να πάρουμε άθροισμα μεγαλύτερο από 7; Ποιά είναι η ίδια πιθανότητα αν γνωρίζουμε ότι το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης είναι 5;

Από τη ρίψη των δυο ζαριών έχουμε 36 δυνατά αποτελέσματα. Τα αποτελέσματα που μας δίνουν άθροισμα μεγαλύτερο του 7 είναι

$\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2),(3,6),(6,3),(4,5),(5,4),(4,6),(6,4),(5,6),(6,5),(5,5),(6,6)\}$, σύνολο 15 διαφορετικά ενδεχόμενα, επομένως η πιθανότητα είναι 15/36.

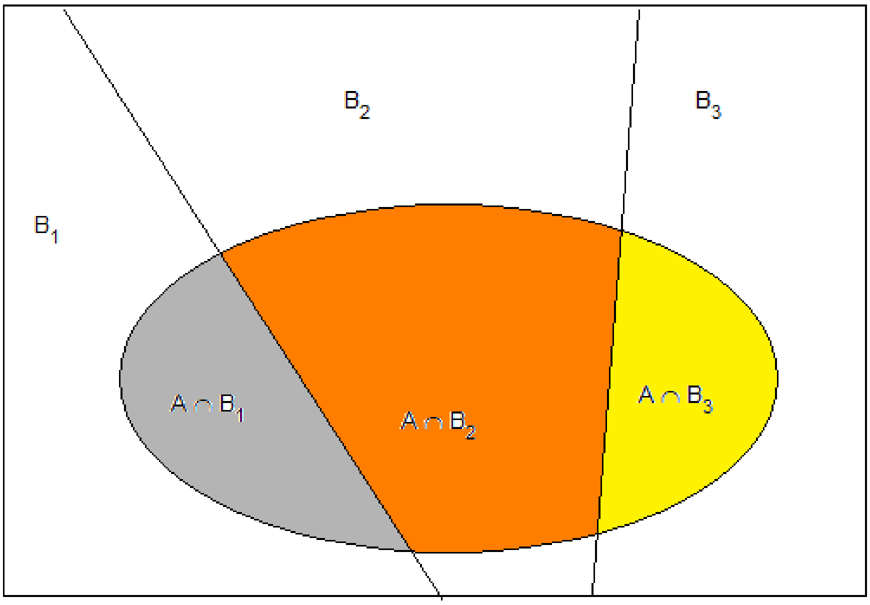
Αν το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης είναι 5 τότε τα δυνατά ενδεχόμενα είναι 6 (τα αποτελέσματα της δεύτερης ρίψης) και τα ευνοικά είναι {(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)}, σύνολο 4 και η ζητούμενη πιθανότητα είναι 4/6=2/3. Ας το δούμε τώρα χρησιμοποιώντας τη δεσμευμένη πιθανότητα. Έστω A το ενδεχόμενο το άθρισμα των ρίψεων να είναι μεγαλύτερο από 7 και B το ενδεχόμενο το πρώτο ζάρι να είναι 5. έχουμε P(B)=1/6 και $P(A \cap B) = 4/36$άρα P(A/B)=2/3

Αν για τα ενδεχόμενα $B_1, B_2, ..., B_k$ ισχύει ότι $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_k = \Omega$ και τα ενδεχόμενα είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα $B_i \cap B_j = \varnothing$ για κάθε i και j, τότε λέμε ότι τα ενδεχόμενα $B_1, B_2, ..., B_k$ αποτελούν μια διαμέριση του δειγματικού χώρου.

Θεώρημα ολικης πιθανότητας : Αν τα ενδεχόμενα $B_1, B_2, ..., B_k$ αποτελούν μια διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω τότε η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου A δίνεται από τον τύπο

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + ... + P(A \cap B_k) = \sum_{i=1}^{k} P(A \cap B_i)$$

ή εναλλακτικά $P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i / A) \times P(B_i)$



Παράδειγμα : Το 5% του πληθυσμού πάσχει από κάποια ασθένεια. Ενα τεστ ανιχνεύει την αρρώστια με πιθανότητα 99% όταν κάποιος πάσχει από την ασθένεια και με πιθανότητα 10% όταν κάποιος δεν πάσχει από την αρρώστια. Δοθέντος ότι το τεστ είναι θετικό, ποιά είναι η πιθανότητα να πάσχει κάποιος από την αρρώστια δοθέντος ότι το τεστ ήταν θετικό;

Έστω B το ένδεχόμενο να πάσχει κάποιος από την ασθένεια. Έχουμε P(B)=0.05 και P(B')=1-P(B)=0.95. Έστω Θ το ενδεχόμενο το τεστνα είναι θετικό, έχουμε P(Θ/B)=0.99 και P(Θ/B')=0.1. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι P(B/Θ); Τα ενδεχόμενα B και B' αποτελούν μια διαμέριση του δειγματικού χώρου, σύμφωνα με το θεώρημα της ολικής πιθανότητας

$$\mathrm{P}(\Theta) = \mathrm{P}(\Theta / \mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{B}) + \mathrm{P}(\Theta / \mathrm{B}')\mathrm{P}(\mathrm{B}') = 0.99 \times 0.05 + 0.1 \times 0.95 = 0.1445$$

σύμφωνα με το θεώρημα του Bayes

$$P(B/\Theta)=\frac{\mathrm{P}(\Theta/\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{B})}{P(\Theta)}=\frac{0.99\times 0.05}{0.1445}=\frac{0.0495}{0.1445}=0.3426$$ ή 34.26%

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Μια κλειδαριά ανοίγει με έναν κωδικό που αποτελείται από τρεις αριθμούς (0-9). Πόσοι είναι οι δυνατοί συνδυασμοί για τον κωδικό;
2. Ποιά είναι η πιθανότητα ότι σε ένα σύνολο 23 ατόμων θα υπάρχουν τουλάχιστον 2 άτομα που θα έχουν γενέθλια την ίδια μέρα;
3. Από ένα σύνολο 10 προιόντων όπου τα 3 είναι ελαττωματικά, με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω 4 προιόντα και να πάρω τουλάχιστον 2 ελαττωματικά;
4. Ένας εργαζόμενος σε μια επιχείρηση αμοίβεται ανάλογα με την απόδοση του με 5, 10 ή 20 ευρώ την ώρα. Πόσοι είναι οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να αμοιφθεί με τουλάχιστον 30 ευρώ κατά τη διάρκεια ενός τριώρου; Ποιά είναι η αντίστοιχη πιθανότητα αν θεωρήσουμε τα τρια ενδεχόμενα αμοιβής του ισοπίθανα;
5. Πόσες διαφορετικές λέξεις μπορούμε να σχηματίσουμε με τα γράμμα της λέξης ‘πόρτα’;
6. Το 8% των διδύμων στους ανθρώπους είναι ομοζυγωτικοί, το υπόλοιπο 92% ετεροζυγωτικοί. Οι ομοζυγωτικοί δίδυμοι είναι του ιδίου φύλου. Κάθε ετεροζυγωτικός δίδυμος έχει πιθανότητα 0.5 να είναι άνδρας. Τι ποσοστό από τα δίδυμα κορίτσια είναι ομοζυγωτικά;
7. Σε μια τάξη 30 μαθητών υπάρχουν 10 αγόρια και 20 κορίτσια, με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε μια πενταμελή επιτροπή που να αποτελείται από 2 αγόρια και 3 κορίτσια;
8. Ένας παίχτης ΛΟΤΤΟ επιλέγει 6 αριθμούς από ένα σύνολο 49 αριθμών. Ποιά είναι η πιθανότητα ότι θα επιλέξει 5 από τους τυχερούς αριθμούς;
9. Μια φοιτήτρια μπορεί να απαντήσει σε 7 από τις 10 ερωτήσεις ενός διαγωνίσματος. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να επιλέξει σε ποιές ερωτήσεις να απαντήσει; Ποιές είναι οι επιλογές της αν υποχρεούται να απαντήσει στην πρώτη και τρίτη ερώτηση;
10. Η πιθανότητα να βρέξει μια συγκεκριμμένη μέρα είναι 0.3 και αυτή η πιθανότητα δεν εξαρτάται από το αν έβρεξε την προηγούμενη μέρα ή όχι. Ποιά είναι η πιθανότητα να βρέξει τουλάχιστον μια φορά σε μια περίοδο μιας εβδομάδας; Ποιά είναι η πιθανότητα να βρέξει τουλάχιστον 2 φορές αν γνωρίζουμε ότι θα βρέξει τουλάχιστον 1 φορά
11. Οι υποψήφιοι Ανωτάτων σχολών κρίνονται ως ‘ικανοί’ ή ‘όχι ικανοί’ με βάση τις πανελλαδικές εξετάσεις στις οποίες το ποσοστό επιτυχίας από τους πράγματι ‘ικανούς’ είναι 80% ενώ από τους ‘μη ικανούς’ είναι 25%. Δεδομένου ότι το ποσοστό των ‘ικανών’ υποψηφίων είναι 40%. Να βρεθεί το ποσοστό των ικανών φοιτητών των Ανωτάτων σχολών.
12. Δυο μηχανές εργοστασίου παράγουν το 10% και το 90% αντίστοιχα της παραγωγής ενός αντικειμένου. Είναι γνωστό ότι η πιθανότητα της πρώτης μηχανής να παράγει ελαττωματικό αντικείμενο είναι 0.01 και της δεύτερης είναι 0.05. Αντικείμενο εκλέγεται στην τύχη και βρίσκεται ελαττωματικό. Ποια είναι η πιθανότητα να προέρχεται από τη δεύτερη μηχανή.
13. Για τη ζήτηση ενός νέου προϊόντος ο υπεύθυνος της επιχείρησης αντιστοιχεί πιθανότητα 0.6 να είναι μεγάλη, 0.25 να είναι μέτρια και 0.15 να είναι χαμηλή. Σχετική έρευνα της αγοράς έδειξε ότι η ζήτηση θα είναι υψηλή. Από προηγούμενη πείρα είναι γνωστό ότι το 80% των παρομοίων ερευνών έδειξαν υψηλή ζήτηση όταν η ζήτηση είναι υψηλή, ενώ, όταν η ζήτηση ήταν μέτρια και χαμηλή, τα αντίστοιχα ποσοστά ήταν 60% και 15%. Με βάση τα δεδομένα αυτά να επαναπροσδιορίσετε τις πιθανότητες για τα τρία επίπεδα ζήτησης.
14. Τι πιθανότητα έχουμε ώστε ρίχνοντας ένα νόμισμα να εμφανισθεί η τρίτη κορώνα στην έβδομη ρίψη.
15. Από ομάδα 5 ανδρών και 3 γυναικών πρόκειται να σχηματιστεί τριμελής επιτροπή. Με πόσους τρόπους μπορεί να συμβεί αυτό; Με πόσους τρόπους μπορεί να συμβεί αν η τριμελής επιτροπή πρέπει να περιλαμβάνει άτομα και των δύο φύλλων;
16. Τα ποσοστά επιτυχίας σε δυο διαγωνίσματα Α και Β είναι 60% και 50% αντίστοιχα. Το 35% των μαθητών περνάει και τα δυο διαγωνίσματα. Ποια είναι η πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγόμενος μαθητής να περάσει
   Α) Ένα τουλάχιστον διαγώνισμα από τα δυο
   Β) Κανένα από τα δυο
   Γ) Ακριβώς ένα από τα δυο

17. 4 μηχανήματα Α, Β, Γ και Δ λειτουργούν ανεξάρτητα με πιθανότητες 0.5, 0.6, 0.7 και 0.8 αντίστοιχα α) Ποιά είναι η πιθανότητα, σε δοσμένη στιγμή, να λειτουργούν και τα 4 μηχανήματα β) να μη λειτουργεί κανένα
18. Η πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος άνθρωπος να καπνίζει είναι 0.65, οι αντίστοιχες πιθανότητες να είναι κάποιος πάνω από 190 εκατοστά και να αθλείται συστηματικά είναι 0.1 και 0.5 αντίστοιχα. Ονομάζουμε τα παραπάνω ενδεχόμενα Α, Β και Γ. Έχουμε επίσης $P(A \cap B) = 0.065$και $P(A \cap B) = 0.1$. Να διερευνηθεί α) αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ανεξάρτητα β) αν τα ενδεχόμενα Α και Γ είναι ανεξάρτητα.
19. Μεγάλη μεταλλευτική εταιρεία θέλει να διαπραγματευτεί την αγορά ορισμένης έκτασης. Ο υπεύθυνος μηχανικός δίνει πιθανότητα 50% να περιέχει η έκταση σημαντικό κοίτασμα μετάλλου. Η εταιρεία πραγματοποιεί ορισμένο τεστ το οποίο όταν υπάρχει σημαντικό κοίτασμα είναι θετικό στο 60% των περιπτώσεων, ενώ όταν δεν υπάρχει είναι θετικό στο 20% των περιπτώσεων. Αν το τεστ που έκανε η εταιρεία βγήκε θετικό, ποια η πιθανότητα η έκταση να περιέχει σημαντικό κοίτασμα μετάλλου;
20. Ένα κατάστημα δώρων χρησιμοποιεί τρεις υπαλλήλους στην περίοδο των Χριστουγέννων για το περιτύλιγμα των δώρων: τη Χριστίνα, την Ειρήνη και την Ιωάννα. Η Χριστίνα περιτυλίγει τα 38% των δώρων, αλλά για τα 2% από αυτά ξεχνάει να βγάλει την ετικέτα με την τιμή από τα δώρα πριν τα τυλίξει. Για την Ειρήνη, τα αντίστοιχα ποσοστά είναι 22% και 8%, ενώ για την Ιωάννα τα ποσοστά αυτά είναι 40% και 5%. (α) Για ένα δώρο που αγοράσθηκε από αυτό το κατάστημα, ποιά είναι η πιθανότητα να μην έχει βγει η ετικέτα με την τιμή; (β) Ένας πελάτης, ο οποίος έκανε τηλεφωνική παραγγελία στο κατάστημα, ανακαλύπτει ότι η ετικέτα με την τιμή δεν είχε βγει. Τί πιθανότητα υπάρχει να έκανε το τύλιγμα η Χριστίνα;
21. Σε μία κωμόπολη, είναι γνωστό ότι το 10% των κατοίκων πάσχουν από μία μεταδοτική ασθένεια. Η κυβέρνηση στέλνει ένα συνεργείο να εξετάσει τους κατοίκους. Υποθέσατε ότι για ένα άτομο που πάσχει από την ασθένεια, η πιθανότητα να γίνει σωστή διάγνωση είναι 0,95· ενώ, αν το άτομο δεν πάσχει από την ασθένεια, η πιθανότητα να διαγνωσθεί ότι πάσχει είναι 0,02. Ένα άτομο επιλέγεται τυχαία από το συνεργείο και εξετάζεται. (α) Ποιά είναι η πιθανότητα να διαγνωσθεί ότι το άτομο πάσχει από την ασθένεια; (β) Αν το συνεργείο αποφανθεί ότι το άτομο πάσχει από την ασθένεια, ποιά είναι η πιθανότητα να πάσχει στα αλήθεια.
22. Πρόσφατα, ο Θωμάς έγινε αποδεκτός από ένα πανεπιστήμιο του εξωτερικού για να κάνει μεταπτυχιακές σπουδές. Ο Θωμάς δέχθηκε την προσφορά, με την ελπίδα ότι θα κατορθώσει να πάρει μία υποτροφία από το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών (ΙΚΥ). Η πιθανότητα να πάρει την υποτροφία είναι 0,80. Αν την πάρει, τότε η πιθανότητα να τελειώσει τις μεταπτυχιακές σπουδές του είναι 0,90· ενώ αν δεν την πάρει, τότε η πιθανότητα να τελειώσει είναι 0,20. (α) Ποιά είναι η πιθανότητα ο Θωμάς να τελειώσει τις μεταπτυχιακές του σπουδές; (β) Ύστερα από χρόνια, μαθαίνετε ότι ο Θωμάς τελείωσε τις μεταπτυχιακές του σπουδές. Ποιά είναι η πιθανότητα ότι είχε πάρει την υποτροφία;