Πανεπιστήμιο
Ιωαννίνων

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

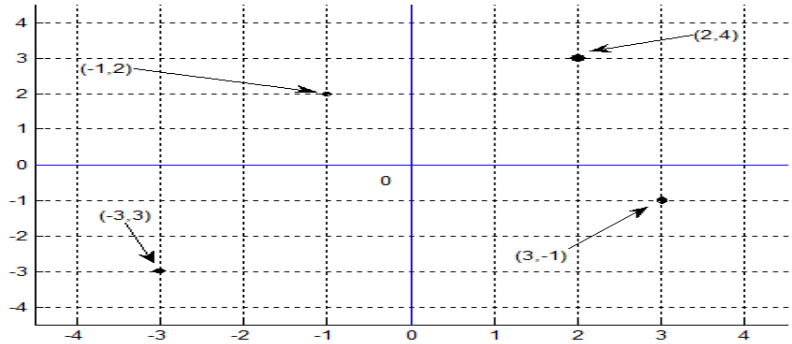
Δημήτρης Μαυρίδης
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης
dmavridi@uoi.gr

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σκοπός των παρούσων σημειώσεων είναι να καλύψουν τα βασικά σημεία του μαθήματος. Το μάθημα μπορεί να χωριστεί χονδρικά σε τρία τμήματα, στην αναλυτική γεωμετρία όπου έγινε μια εισαγωγή στην εξίσωση της ευθείας και του κύκλου, σε μια εισαγωγή στα διανύσματα και στις βασικές τους ιδιότητες και πράξεις και σε μια εισαγωγή στους πίνακες. Τα τρία αυτά κομμάτια είναι αλληλένδετα και επίσης συνδεόνται και με τις εξισώσεις των γραμμικών συστημάτων. Βάση και προκάτοχος όλων αυτών είναι η Ευκλείδια Γεωμετρία η οποία δεν αποτελεί μέρος αυτού του μαθήματος αλλά κάποια στοιχειώδη γνώση της είναι απαραίτητη για την κατανόηση του. Στο τέλος των σημειώσεων δίνεται παράρτημα με κάποια βασικά θεωρήματα και γνώσεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και της Τριγωνομετρίας. Σκοπός του μαθήματος είναι η εξοικίωση με τη γεωμετρική ερμηνεία διαφόρων αντικειμένων με την αλγεβρική ερμηνεία των οποίων ενδεχομένως να είστε εξοικιωμένοι από το Λύκειο. Δίνεται ένα πλήθος παραδειγμάτων και ασκήσεων για την ευκολότερη κατανόηση των εννοιών καθώς και ασκήσεις για λύση.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Η Αναλυτική Γεωμετρία είναι ο κλάδος της Γεωμετρίας ο οποίος χρησιμοποιεί ένα σύστημα συντεταγμένων για να προσδιορίσει τη θέση των σημείων στο χώρο επιτρέποντας στα γεωμετρικά σχήματα να εκφραστούν μέσω αλγεβρικών σχέσεων. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιείται το Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, το οποίο εισήχθη το 1637 από τον Καρτέσιο. Στην πιο διαδεδομένη του μορφή απεικονίζει σημεία στο δισδιάστατο χώρο και αποτελείται από 2 κάθετους άξονες. Ο οριζόντιος άξονας συνήθως συμβολίζεται με χ΄χ και ονομάζεται ο άξονας των τετμημένων ενώ ο κάθετος άξονας συνήθως συμβολίζεται με y΄y και ονομάζεται ο άξονας των τεταγμένων. Κάθε σημείο Α εκφράζεται από 2 αριθμούς, την τετμημένη του x και την τεταγμένη του y επιτρέποντας μας να το γράψουμε ως Α(x,y). Τα σημεία εντοπίζονται στο χώρο όπως στο Σχήμα 1, για να βρούμε το σημείο Α(x,y) παίρνουμε την κάθετο στον άξονα χ΄χ στην τετμημένη του σημείου Α (x) και την κάθετο στον άξονα y΄y στην τεταγμένη του σημείου Α (y) και το σημείο Α(x,y) βρίσκεται στην τομή αυτών των δυο καθέτων.

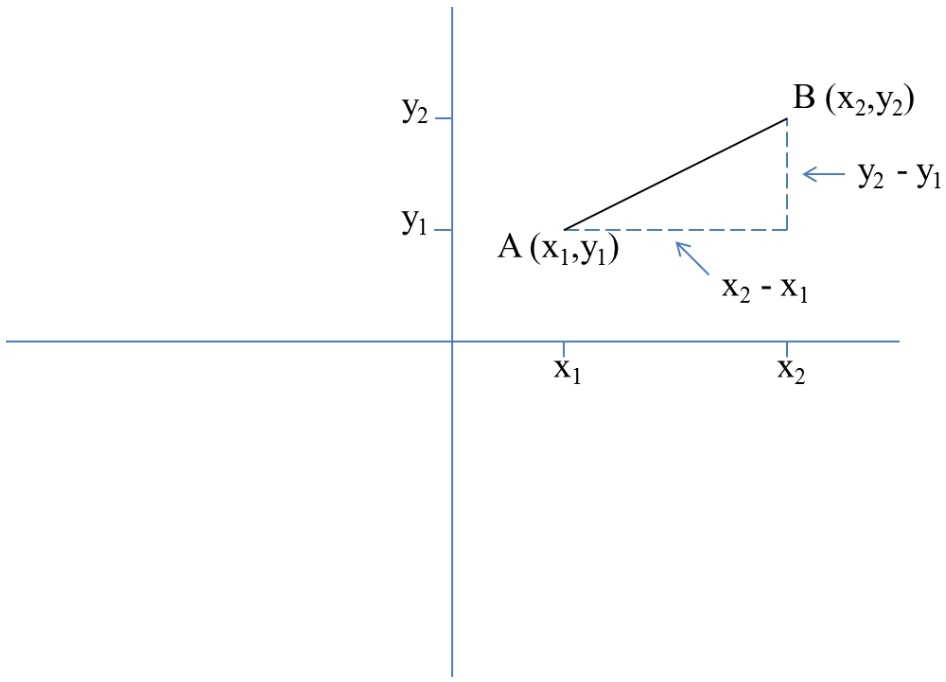


Σχήμα 1 : Απεικόνιση σημείων στο δισδιάστατο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

Απόσταση μεταξύ 2 σημείων

Έστω ότι έχουμε δυο σημεία Α(x_1, y_1) και Β(x_2, y_2) , Η απόσταση μεταξύ των δυο σημείων εκφράζεται από το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει (Σχήμα 2) και σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα αυτή η απόσταση είναι ίση με

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \Leftrightarrow AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1)$$



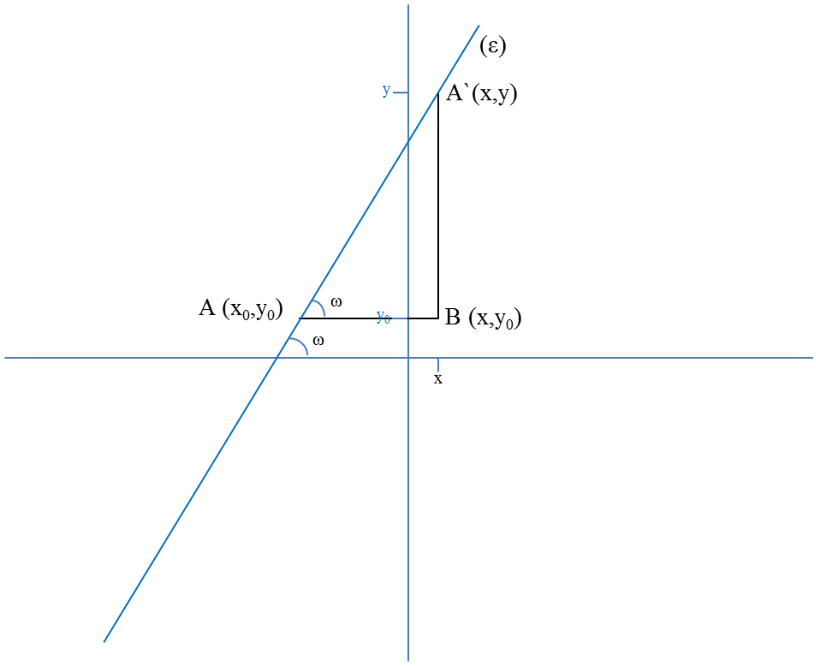
Σχήμα 2 : Απόσταση μεταξύ 2 σημείων

Εξίσωση ευθείας

Έστω μια ευθεία (ε) της οποίας γνωρίζουμε ένα σημείο Α(x_0, y_0) και τη γωνία $\hat{\omega}$ που σχηματίζει με τον άξονα των τετμημένων. Από κάθε σημείο περνούν άπειρες ευθείες αλλά μόνο μια ευθεία σχηματίζει συγκεκριμένη γωνία $\hat{\omega}$ με κάποια άλλη ευθεία που την τέμνει (στη συγκεκριμένη περίπτωση με τον άξονα των τετμημένων). Θέλουμε να βρούμε την εξίσωση της ευθείας, δηλαδή όλα εκείνα τα σημεία Α΄(x,y) που την επαληθεύουν. Μπορούμε να φανταστούμε από το Σχήμα 3 ότι, ασχέτως με το που θα τοποθετήσουμε το σημείο Α΄ πάνω στην ευθεία μας, σχηματιζεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΑ’ με κορυφές τα σημεία Α(x_0, y_0), Α΄(x,y) και Β(x, y_0). Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι παράλληλο προς τον άξονα των τετμημένων. Οι γωνίες $\hat{\omega}$ και $\mathrm{A'}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}$ είναι ίσες ως εντός εκτός και επί ταύτα. Η εφαπτομένη της γωνίας $\mathrm{A'}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}$ ισούται με $\varepsilon\phi\hat{\omega} = \frac{\mathrm{A'B}}{\mathrm{AB}} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$. Η εφαπτομένη της γωνίας $\hat{\omega}$ συνήθως συμβολίζεται με το ελληνικό γράμμα λ και δηλώνει την κλίση της ευθείας. Η εξίσωση της ευθείας γίνεται

$$\lambda = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Leftrightarrow y - y_0 = \lambda(x - x_0) \qquad (2)$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι αν τοποθετήσουμε το σημείο Α΄ πιο χαμηλά από το σημείο Α θα σχηματιστεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΑ’ με κορυφές τα σημεία Α(x_0, y_0), Α΄(x,y) και Β(x_0, y). Οι γωνίες $\hat{\omega}$ και $\mathrm{A}\hat{\mathrm{A}}'\mathrm{B}$ θα είναι ίσες ως εντός εκτός και επί ταύτα και η εφαπτομένη της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\mathrm{A}}'\mathrm{B}$ ισούται με $\varepsilon\phi\hat{\omega} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A'B}} = \frac{y_0 - y}{x_0 - x}$ η οποία οδηγεί στη εξίσωση (2)



Σχήμα 3 : Αναπαράσταση ευθείας στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

Αν γνωρίζουμε δυο σημεία της ευθείας μας Α(x_1, y_1) και Α΄(x_2, y_2) τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το συντελεστή λ με τον τύπο $\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Από δυο σημεία διέρχεται μόνο μια ευθεία, επομένως ο συντελεστής λ είναι μοναδικός.

Παράδειγμα : Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο Α(1,5) και σχηματίζει γωνία 60^o με τον άξονα χ'χ.

Η εφαπτομένη της γωνίας 60^o ισούται με $\lambda = \sqrt{3}$. Το σημείο της ευθείας που γνωρίζουμε είναι το Α($x_0 = 1, y_0 = 5$). Επομένως η εξίσωση της ευθείας μας είναι y-5= $\sqrt{3}$ (x-1)

Παράδειγμα : Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημεία Α(2,3) και Β(7,5).

Ο συντελεστής της ευθείας δίνεται από τον τύπο $\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{5-3}{7-2} = \dfrac{2}{5}$

Θα χρησιμοποιήσουμε ένα από τα 2 σημεία μας Α και Β για να υπολογίσουμε την ευθεία.

Έστω ότι χρησιμοποιούμε το Α, $y - 3 = \dfrac{2}{5}(x-2) \Leftrightarrow y = \dfrac{2}{5}x + \dfrac{11}{5}$

Έστω ότι χρησιμοποιούμε το Β, $y-5=\frac{2}{5}(x-7) \Leftrightarrow y=\frac{2}{5}x+\frac{11}{5}$

Οι ευθείες δίνονται συνήθως στην μορφή y=λχ+β, αν αντικαταστήσουμε το χ με το 0 έχουμε y=β. Επομένως το σημείο (0,β) είναι το σημείο που τέμνει η ευθεία μας τον άξονα των τεταγμένων.

Μια εναλλακτική μορφή αναπαράστασης της ευθείας είναι η Αχ+ By+Γ=0. Σε αυτήν την περίπτωση ο συντελεστής της ευθείας δεν είναι ο συντελεστής που βρίσκεται μπροστά από το χ αλλά η ποσότητα $\lambda=-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$. Η ευθεία του παραπάνω παραδείγματος μπορεί να αναπαρασταθεί και ως 5y-2χ-11=0.

Παράλληλες και κάθετες ευθείες

Έστω 2 παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 όπως στο αριστερό διάγραμμα του τέταρτου σχήματος. Οι γωνίες $\hat{\omega}_1$ και $\hat{\omega}_2$ είναι ίσες ως εντός εκτός και επί ταύτα. Επομένως οι δυο ευθείες έχουν τον ίδιο συντελεστή $\lambda_{\varepsilon_1}=\lambda_{\varepsilon_2}$. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι παράλληλες ευθείες έχουν τον ίδιο συντελεστή ευθείας αλλά και το ότι ευθείες με διαφορετικούς συντελεστές δεν είναι παράλληλες και επομένως τέμνονται.

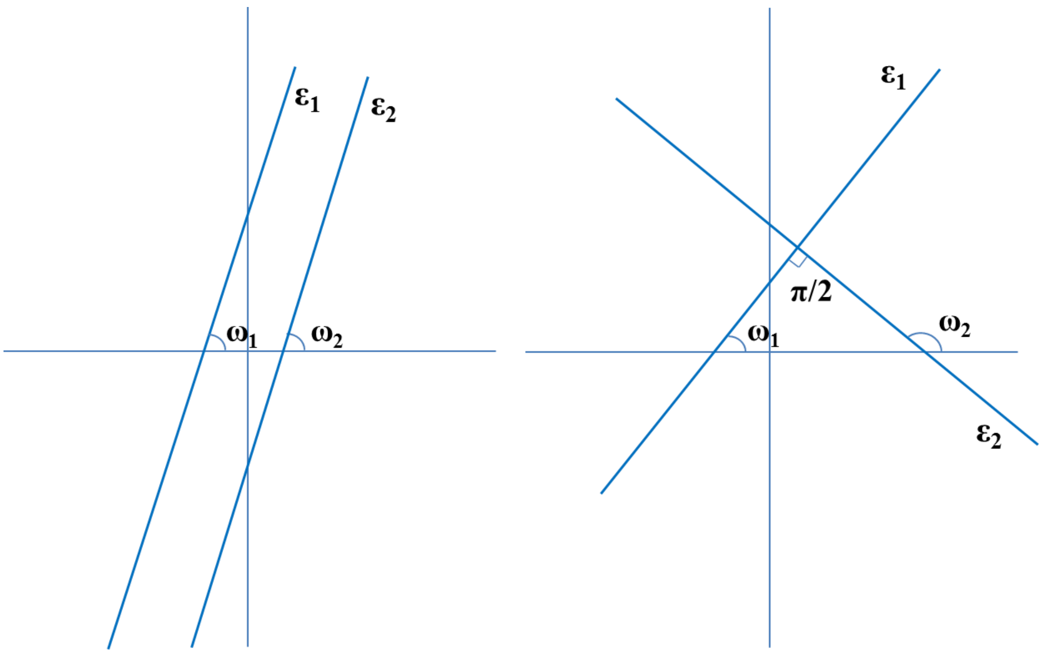
Στο δεξιό σύστημα συντεταγμένων του τέταρτου γραφήματος έχουμε δυο ευθείες που σχηματίζουν μια ορθή γωνία. Η ευθεία ε_1 έχει συντελεστή ευθείας $\lambda_{\varepsilon_1}=\varepsilon\phi\hat{\omega}_1$. Η γωνία $\hat{\omega}_2$ είναι εξωτερική του τριγώνου που σχηματίζεται από τις 2 ευθείες και τον άξονα των τετμημένων και επομένως ισούται με το άθροισμα των δυο άλλων γωνιών

$$\hat{\omega}_2=\frac{\pi}{2}+\hat{\omega}_1$$

Επομένως ο συντελεστής της ευθείας ε_2 είναι

$$\lambda_{\varepsilon_2}=\varepsilon\phi\hat{\omega}_2=\varepsilon\phi(\frac{\pi}{2}+\hat{\omega}_1)=-\sigma\phi\hat{\omega}_1=-\frac{1}{\varepsilon\phi\hat{\omega}_1}$$

Παρατηρούμε ότι για να είναι κάθετες οι ευθείες ε_1 και ε_2 πρέπει $\lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{\varepsilon_2}=-1$



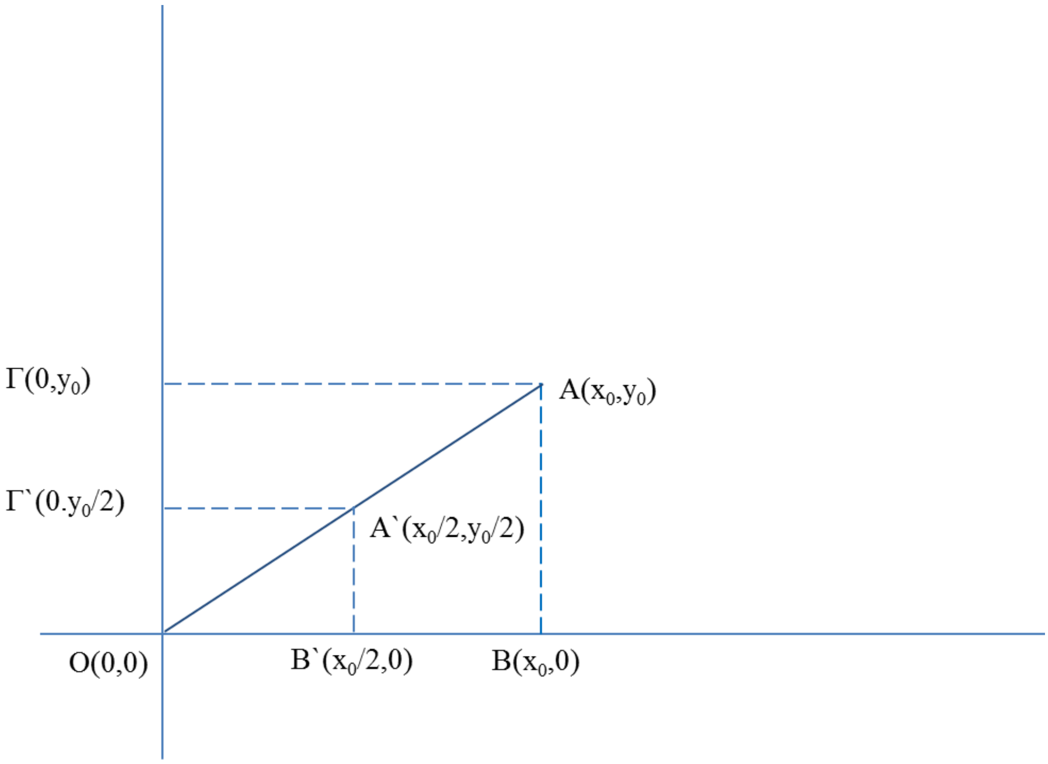
Σχήμα 4 : Παράλληλες και κάθετες ευθείες

Όλα τα σημεία μιας ευθείας, που είναι παράλληλη στον άξονα χ΄χ, έχουν την ίδια τεταγμένη y_0 και η εξίσωση της ευθείας είναι $y = y_0$.
Όλα τα σημεία μιας ευθείας, που είναι παράλληλη στον άξονα y΄y, έχουν την ίδια τετμημένη x_0 και η εξίσωση της ευθείας είναι $x = x_0$.

Μέσο ευθύγραμμου τμήματος

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος ΟΑ (Σχήμα 5) με Α(x_0, y_0). Το μέσο της ΟΒ είναι το σημείο Β΄($x_0/2, 0$) ενώ το μέσο της ΟΓ είναι το Γ'($0, y_0/2$). Οι πλευρές ΟΓ και ΑΒ είναι παράλληλες και αφού η Α΄Β΄ ορίζει ίσα τμήματα στην ΟΒ, σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή, θα ορίζει ίσα τμήματα και στην ΟΑ. Επομένως η τετμημένη του Α΄ είναι $x_0/2$. Ομοίως οι πλευρές ΟΒ και ΑΓ είναι παράλληλες και αφού η Α'Γ' ορίζει ίσα τμήματα στην ΟΓ θα ορίζει ίσα τμήματα και στην ΟΑ. Επομένως η τετμημένη του Α΄ είναι $y_0/2$.

Γενικώς το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ με Α(x_1, y_1) και Β(x_2, y_2) έχει συντεταγμένες $(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$



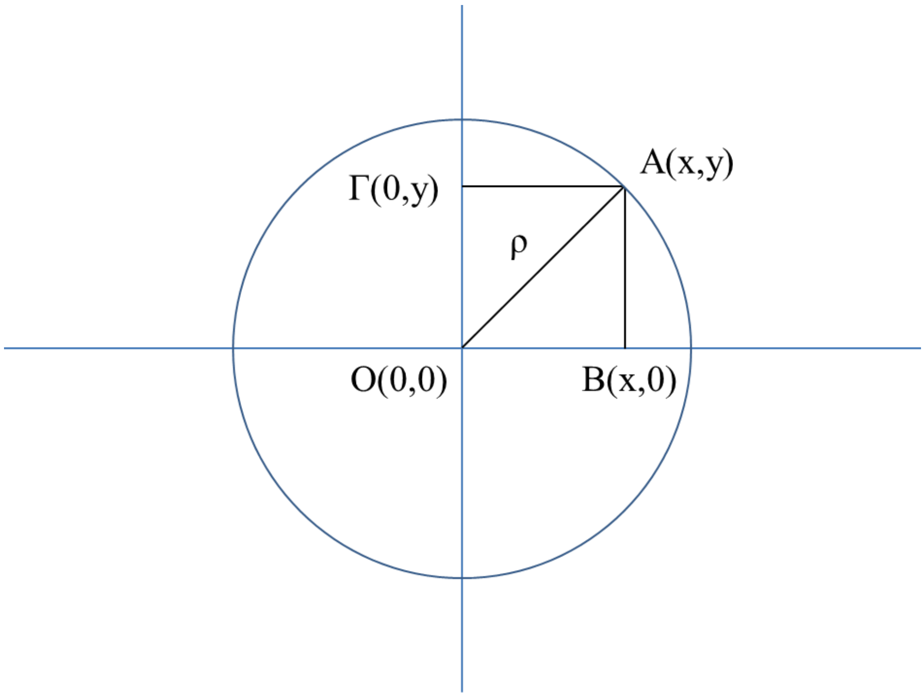
Σχήμα 5 : Μέσο ευθύγραμμου τμήματος

ΚΥΚΛΟΣ

Ως κύκλος ορίζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από ένα συγκεκριμένο σημείο που αποτελεί το κέντρο του. Ένας κύκλος χαρακτηρίζεται από το κέντρο του Κ και την ακτίνα του ρ και είναι εκείνο το γεωμετρικό σχήμα όπου όλα τα σημεία του ισαπέχουν απόσταση ρ από το Κ. Αν δηλαδή Κ(x_0, y_0) τότε όλα τα σημεία χ,y που ικανοποιούν την εξίσωση

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2 \qquad (3)$$

Για έναν κύκλο που έχει ως κέντρο την αρχή των αξόνων είναι φανερό από το Σχήμα 6 ότι η εξίσωση του εν λόγω κύκλου είναι $x + y^2 = \rho^2$



Σχήμα 6 : Κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων O(0,0) και ακτίνα ρ

Εξίσωση εφαπτομένης Κύκλου

Θεωρούμε κύκλο με κέντρο Κ(x_0, y_0) και ακτίνα ρ. Έστω Α(x_1, y_1) ένα σημείο του κύκλου. Από αυτό το σημείο διέρχεται μια μόνο ευθεία που εφάπτεται του κύκλου σε αυτό το σημείο σχηματίζοντας με την ακτίνα του μια ορθή γωνία (Σχήμα 7). Για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας αρκεί να βρούμε την κλίση του ευθύγραμμου τμήματος ΚΑ, έστω λ_{KA}, και αφού η ευθεία (ε) είναι κάθετη στο ΑΒ θα πρέπει να έχει κλίση $-\dfrac{1}{\lambda_{KA}}$. Έχουμε $\lambda_{KA} = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ και επομένως $\lambda_{\varepsilon} = -\dfrac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}$

Επομένως η εξίσωση της ευθείας ε είναι

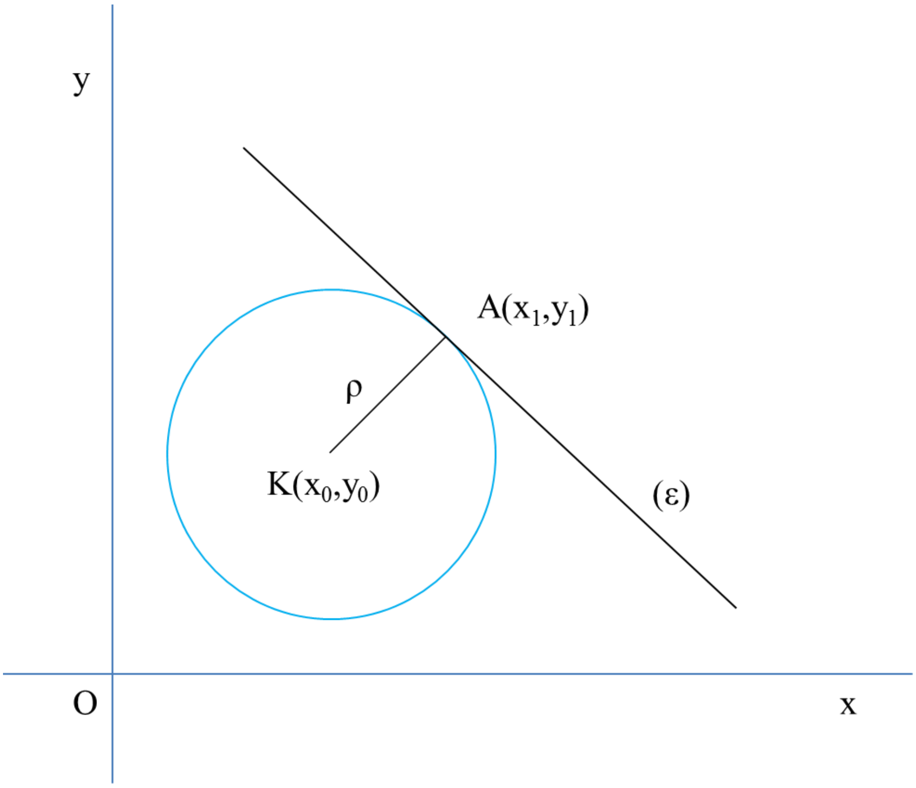
$$y - y_1 = -\frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}(x - x_1) \Leftrightarrow (y - y_1)(y_1 - y_0) + (x - x_1)(x_1 - x_0) = 0 \qquad (4)$$

Εύκολα αποδεικνύεται, προσθέτοντας την ποσότητα $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ και στα δυο μέλη της εξίσωσης (4), ότι η εξίσωση της εφαπτομένης μπορεί να γραφεί ως

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = \rho^2 \qquad (5)$$

και για ένα κύκλο που έχει το κέντρο του στην αρχή των αξόνων

$$xx_1 + yy_1 = \rho^2 \qquad (6)$$



Σχήμα 7 : Εφαπτομένη κύκλου στο σημείο $A(x_1, y_1)$

Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $\mathrm{K}(-\frac{\mathrm{A}}{2}, -\frac{\mathrm{B}}{2})$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma}}{2}$ με την προϋπόθεση $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma \geq 0$. Η παραπάνω εξίσωση προκύπτει από την (3) αν υπολογίσουμε τα αναπτύγματα και θέσουμε $A = -2x_0$, $B = -2y_0$ και $\Gamma = \chi_0^2 + y_0^2 - \rho^2$.

Παράδειγμα : Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο K(3,1) και ακτίνα ρ=2

Από την εξίσωση (3) έχουμε $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 2^2 = 4$

Παράδειγμα : Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 9$ στο σημείο A(1,2)

Είναι φανερό ότι ο κύκλος έχει το κέντρο του στην αρχή των αξόνων. Από την εξίσωση (6) και για $x_1 = 1$ και $y_1 = 2$ έχουμε $x + 2y = 9$

Διάφορες μεθοδεύσεις για τον προσδιορισμό της εξίσωσης του κύκλου

Η εξίσωση του κύκλου προσδιορίζεται από την εξίσωση (3) εφόσον γνωρίζουμε τις συντεταγμένες (x_0, y_0) του κέντρου και την ακτίνα ρ.

- Αν γνωρίζουμε το κέντρο Κ(x_0, y_0) και ακόμα ότι ο κύκλος περνά από ένα σημείο Α(x_1, y_1), τότε η ακτίνα του κύκλου είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΚ.
- Αν γνωρίζουμε το κέντρο Κ(x_0, y_0) και ακόμα ότι ο κύκλος εφάπτεται μιας ευθείας (ε), τότε η ακτίνα του κύκλου ισούται με την ελάχιστη απόσταση του Κ από την ευθεία (ε).
- Αν γνωρίζουμε τρία σημεία του κύκλου τα αντικαθιστούμε στην εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ και λύνουμε το σύστημα με τις τρεις εξισώσεις για να υπολογίσουμε τα Α, Β και Γ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΛΥΣΗ

1) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, με Α(1,3) και Β(0,4) και από το σημείο Γ(-1,2).

Το μέσο Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ έχει συντεταγμένες Μ$(\frac{1+0}{2}, \frac{3+4}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$. Ο συντελεστής της ευθείας που περνάει από τα σημεία Μ και Γ είναι $\lambda = \dfrac{2-\frac{7}{2}}{-1-\frac{1}{2}} = 1$. Επομένως η ζητούμενη ευθεία είναι η $y - 2 = \chi - (-1) \Leftrightarrow y = x + 3$

2) Να εξεταστεί αν οι ευθείες $(\varepsilon_1): 2\chi + 4y - 3 = 0$ και $(\varepsilon_2): \chi + 2y + 4 = 0$, είναι παράλληλες.

Έχουμε $\lambda_{\varepsilon_1} = -\dfrac{1}{2} = \lambda_{\varepsilon_2}$ επομένως οι δυο ευθείες είναι παράλληλες

3) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ε_1 που
Α) περνάει από το σημείο (4,-2) και είναι παράλληλη στην 3χ-7y=7
Β) περνάει από το σημείο (4,1) και είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία (5,2) και (4,4)
Γ) έχει συντελεστή λ=2 και τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο 5
Δ) διέρχεται του σημείου (1,1) και είναι κάθετη στην ευθεία 5χ-7y+3=0

Α) ο συντελεστής της ευθείας (ε_2) 3x-7y=7 είναι λ_{e_2}. Για να είναι οι ε_1 και ε_2 παράλληλες πρέπει $\lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2}$. Άρα $\lambda_{e_1} = \dfrac{3}{7}$ και η εξίσωση της ευθείας ε_1 είναι $y - (-2) = \frac{3}{7}(x-4) \Leftrightarrow y = \frac{3}{7}x - \frac{26}{7}$

Β) Η ευθεία ε_2 που διέρχεται από τα σημεία (5,2) και (4,4) έχει συντελεστή $\lambda_{\varepsilon_2} = \frac{4-2}{4-5} = -2$. Για να είναι οι ε_1 και ε_2 παράλληλες πρέπει $\lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2}$ οπότε η ευθεία μας ε_1 έχει εξίσωση $y-1=-2(x-4) \Leftrightarrow y=-2x+9$

Γ) Αν η γενική μορφή της εξίσωσης είναι y=λχ+β, για χ=0 έχουμε y=β, Επομένως η ευθεία μας τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο (0,β). Επομένως η εξίσωση της ε_1 είναι y=2x+5

Δ) Η ευθεία ε_2 5χ-7y+3=0 έχει συντελεστή $\lambda_{\varepsilon_2} = \frac{5}{7}$ Για να είναι οι ε_1 και ε_2 κάθετες πρέπει $\lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{e_2} = -1$ Άρα $\lambda_{e_1} = -\frac{7}{5}$ και η εξίσωση της ευθείας ε_1 είναι $y-1=-\frac{7}{5}(x-1) \Leftrightarrow y=-\frac{7}{5}x+\frac{12}{5}$

4) Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση του σημείου Α(1,1) από την ευθεία (ε) y=x-3.

Η ελάχιστη απόσταση του σημείου Α από μια ευθεία ισούται με το ευθύγραμμο τμήμα ΑΚ που σχηματίζει ορθή γωνία με την ευθεία. Αν φέρουμε την κάθετο και οποιαδήποτε άλλο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που τέμνει την (ε) τότε σχηματίζεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο με την ΑΒ ως υποτείνουσα και επομένως η ΑΒ είναι μεγαλύτερη από την ΑΚ. Έχουμε $\lambda_\varepsilon = 1$, επομένως $\lambda_{\text{AK}} = -1$ και η εξίσωση του ΑΚ είναι y=-x+2.
Θα βρούμε το κοινό σημείο της ΑΚ με την (ε)

$$\left.\begin{matrix} y=x-3 \\ y=-x+2 \end{matrix}\right\} x-3=-x+2 \Leftrightarrow 2x=5 \Leftrightarrow x=\frac{5}{2} \text{ και } y=\frac{5}{2}-3=-\frac{1}{2} \text{ άρα } K(\frac{5}{2},-\frac{1}{2})$$

Η απόσταση του ΑΚ είναι $AK=\sqrt{(1-(-\frac{1}{2}))^2+(1-\frac{5}{2})^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

(Στη συνέχεια που θα μπούμε στα διανύσματα θα δούμε έναν τύπο για να υπολογίζουμε απευθείας την απόσταση σημείου από ευθεία)

5) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α(5,5), Β(6,4) και Γ(7,1).
Αντικαθιστώντας αυτά τα τρία σημεία στην εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ έχουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων με τρία σημεία και τρεις αγνώστους

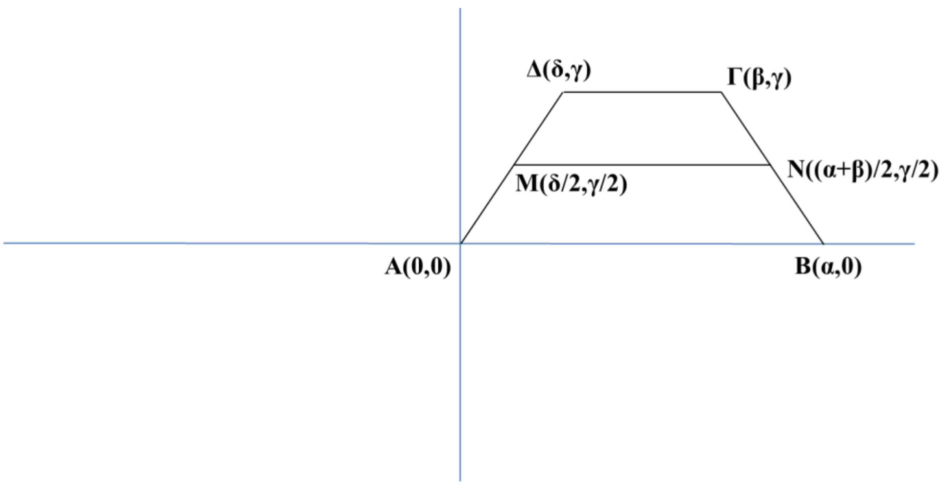
$$5^2+5^2+5A+5B+\Gamma=0 \, (1)$$
$$6^2+4^2+6A+4B+\Gamma=0 \, (2)$$
$$7^2+1^2+7A+B+\Gamma=0 \quad (3)$$

Αφαιρώντας την (1) από την (2) έχουμε $2+\mathrm{A}-\mathrm{B}=0 \Leftrightarrow \mathrm{B}=\mathrm{A}+2$
Αφαιρώντας την (2) από την (3) και αντικαθιστώντας Β=Α+2 έχουμε Α=-4 και Β=-2 και στη συνέχεια βρίσκουμε ότι Γ=-20. Οπότε $A=-2x_0 \Leftrightarrow x_0=2$,
$B=-2y_0 \Leftrightarrow y_0=1$ και $\Gamma=\chi_0^2+y_0^2-\rho^2 \Leftrightarrow \rho=5$ οπότε η εξίσωση του κύκλου είναι

$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5^2$

6) Να δειχτεί ότι η διάμεσος τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι παράλληλη προς τις δυο βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμά τους.

Παίρνουμε τα σημεία Α(0,0), Β(α,0), Γ(β,γ) και Δ(δ,γ). Τα σημεία Α και Β έχουν την ίδια τεταγμένη, όπως και τα σημεία Γ και Δ, επομένως οι ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες μεταξύ τους αλλά και με τον άξονα των τετμημένων (συγκεκριμένα η ΑΒ πέφτει πάνω στον χ΄χ). Το μέσο Μ της πλευράς ΑΔ έχει συντεταγμένες $M(\frac{\delta}{2},\frac{\gamma}{2})$ και το μέσο Ν της ΒΓ έχει συντεταγμένες $M(\frac{\alpha+\beta}{2},\frac{\gamma}{2})$. Αφού τα σημεία Μ, Ν έχουν την ίδια τεταγμένη είναι παράλληλα στον χ΄χ και άρα και στις δυο βάσεις του τραπεζίου ΑΒ και ΓΔ. Το μήκους του ευθύγραμμου τμήματος ΜΝ είναι ίσο με $\mathrm{MN} = \sqrt{(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\delta}{2})^2 + (\frac{\gamma}{2}-\frac{\gamma}{2})^2} = \frac{\alpha+\beta-\delta}{2}$. Το μήκος της ΑΒ είναι α και το μήκος της ΓΔ είναι $\Gamma\Delta = \sqrt{(\frac{\beta}{2}-\frac{\delta}{2})^2 + (\frac{\gamma}{2}-\frac{\gamma}{2})^2} = \frac{\beta-\delta}{2}$. Επομένως $\frac{\mathrm{AB}+\Gamma\Delta}{2} = \frac{\alpha+\beta-\delta}{2} = \mathrm{MN}$



Σχήμα 8 : Αναπαράσταση Τραπεζίου σε ένα Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

<u>Γενικά:</u> Για να δείξουμε αναλυτικά διάφορες προτάσεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που αναφέρονται σε ιδιότητες πλευρών, υψών, διαμέσων κ.τ.λ. μας εξυπηρετεί να θεωρήσουμε ότι μια κορυφή του γεωμετρικού σχήματος πέφτει στην αρχή των αξόνων και ότι τμήμα του άξονα χ΄χ (το ευθύγραμμο τμήμα (α,0)) αποτελεί μια πλευρά του γεωμετρικού σχήματος.

7) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει το κέντρο του στην ευθεία x-2y=0 και περνά από τα σημεία Α(2,6) και Β(7,1).

Θα πρέπει οι συντεταγμένες x_0 και y_0 του κέντρου Κ να ικανοποιούν την εξίσωση $x_0 = 2y_0$. Επίσης, αφού κάθε σημείο του κύκλου ισαπέχει από το κέντρο του, θα πρέπει $AK^2 = BK^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-6)^2 = (x-7)^2 + (y-1)^2$

$(2y-2)^2 + (y-6)^2 = (2y-7)^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow 10y = 10 \Leftrightarrow y = 1$

Επομένως $x_0 = 2y_0 = 2$ και $\rho = \sqrt{(2-2)^2 + (6-1)^2} = 5$ Επομένως η εξίσωση του κύκλου είναι $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5^2$

8) Να δειχθεί ότι οι κύκλοι με εξισώσεις : $C_1 : x^2 + y^2 + 2x - 8y + 13 = 0$ και $C_2 : 4x^2 + 4y^2 - 40x + 8y + 79 = 0$ δεν έχουν κοινό σημείο

Οι δυο εξισώσεις γράφονται $C_1 : (x+1)^2 + (y-4)^2 = 4$ και

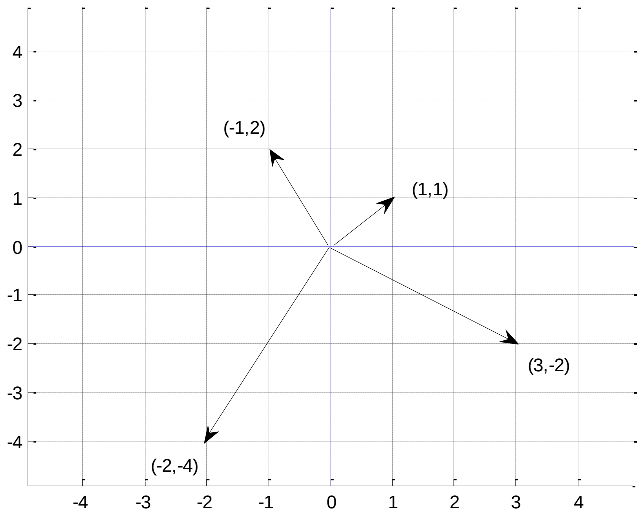
$C_2 : (x-5)^2 + (y+1)^2 = \dfrac{25}{4}$. Επομένως τα κέντρα Κ και Λ έχουν συντεταγμένες Κ(-1,4) και Λ(5,-1). Η απόσταση των δυο κέντρων είναι

$\text{ΚΛ} = \sqrt{(-1-5)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{61}$. Το άθροισμα των ακτινών είναι

$\rho_1 + \rho_2 = 2 + 5/2 < \sqrt{61}$ επομένως οι δυο κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία

Διανύσματα

Τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{\alpha}$ κλπ είναι κατευθυνόμενα ευθύγραμμα τμήματα που χαρακτηρίζονται από το μέγεθος τους και την κατεύθυνση τους. Στο επίπεδο, ένα διάνυσμα περιγράφεται από μια διατεταγμένη δυάδα (α,β) όπου (α,β) είναι το πέρας του διανύσματος σε ένα Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων αν θεωρήσουμε ότι η αρχή του διανύσματος ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων (Σχήμα 9).



Σχήμα 9 : Αναπαράσταση διανυσμάτων σε ένα Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

Τα διανύσματα δεν έχουν απαραίτητα συγκεκριμένη αρχή και τέλος και η αρχή των αξόνων επιλέγεται συμβατικά για ευκολία. Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι το πόσο μετακινούμαστε πάνω στους δυο άξονες. Το διάνυσμα που αρχίζει στο σημείο (1,2) και φτάνει στο σημείο (3,5) είναι ίδιο με το διάνυσμα που ξεκινάει στο σημείο (-1,3) και έχει το πέρας του στο (1,6). Και στα δυο διανύσματα μετακινούμαστε 2 μονάδες στον άξονα των τετμημένων και τρεις μονάδες στον άξονα των τεταγμένων και το εν λόγω διάνυσμα συμβολίζεται ως (2,3). Γενικώς , διανύσματα που προκύπτουν το ένα από το άλλο με παράλληλη μετατόπιση των αξόνων (έχουν το ίδιο μέτρο και την ίδια κατεύθυνση) θεωρούνται ίσα (Σχήμα 10).

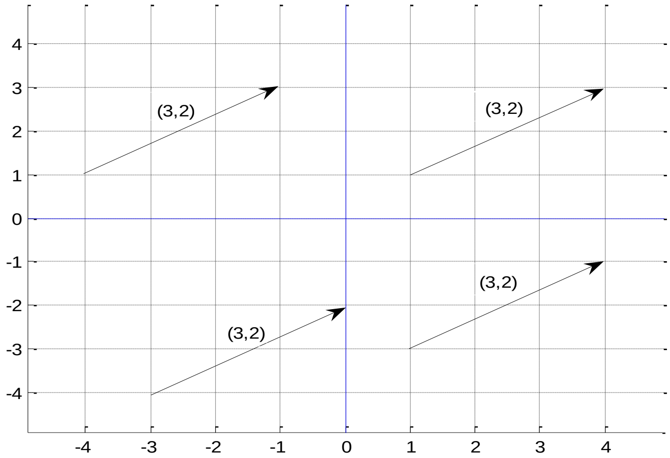
Γενικώς ένα διάνυσμα με αρχή το σημείο Α(x_1, y_1) και πέρας το σημείο Β(x_2, y_2) θα συμβολίζεται με $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ και εύκολα αποδεικνύεται με τη χρήση του Πυθαγορείου θεωρήματος ότι το μήκος του ισούται με $\|AB\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Η κατεύθυνση ενός διανύσματος $\vec{\gamma}$ ορίζεται από τις δυο γωνίες $\hat{\phi}$ και $\hat{\theta}$ που σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες των συντεταγμένων (Σχήμα 11). Έστω ότι το διάνυσμα ξεκινάει από την αρχή των αξόνων και καταλήγει σε κάποιο σημείο Α(α,β). Η γωνία $\hat{\phi}$ είναι η γωνία $x\hat{O}A$ που σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα των τετμημένων και μας δίνει $\sigma\upsilon\nu\,\hat{\phi} = \frac{\alpha}{\|\vec{\gamma}\|} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + (-\beta)^2}} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$

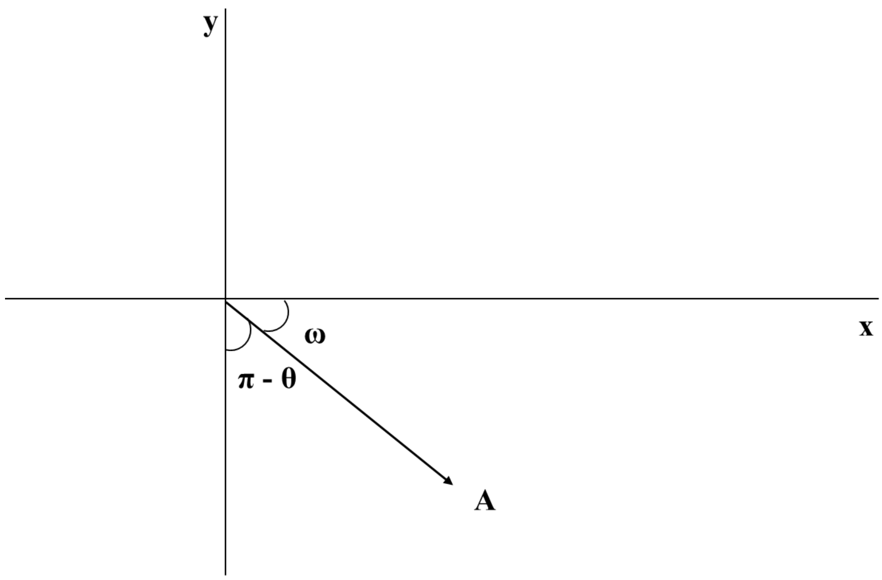
Ομοίως η γωνία $\hat{\theta}$ είναι η γωνία $y\hat{O}A$ που σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα των τεταγμένων και μας δίνει

$\sigma\upsilon\nu\,\hat{\theta} = -\sigma\upsilon\nu(\pi - \hat{\theta}) = -\frac{-\beta}{\|\vec{\gamma}\|} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + (-\beta)^2}} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$. Τα συνημίτονο των γωνιών $\hat{\phi}$ και $\hat{\theta}$ ονομάζονται κατευθύνοντα συνημίτονα και ισχύει η σχέση

$$\sigma\upsilon\nu^2\hat{\phi} + \sigma\upsilon\nu^2\hat{\theta} = 1$$



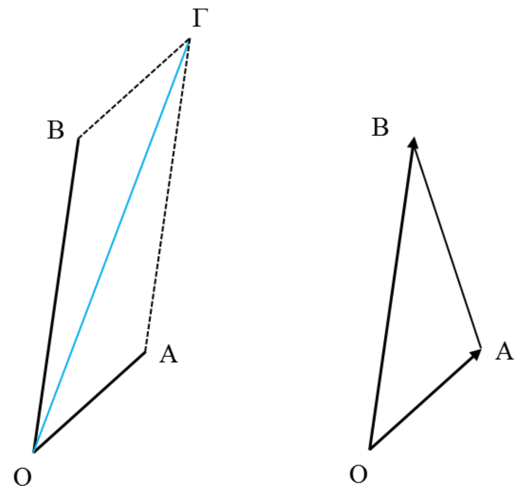
Σχήμα 10 : Διάφορες αναπαραστάσεις του διανύσματος (3,2)



Σχήμα 11 : Οι γωνίες που σχηματίζονται με τους θετικούς ημιάξονες

Πράξεις διανυσμάτων

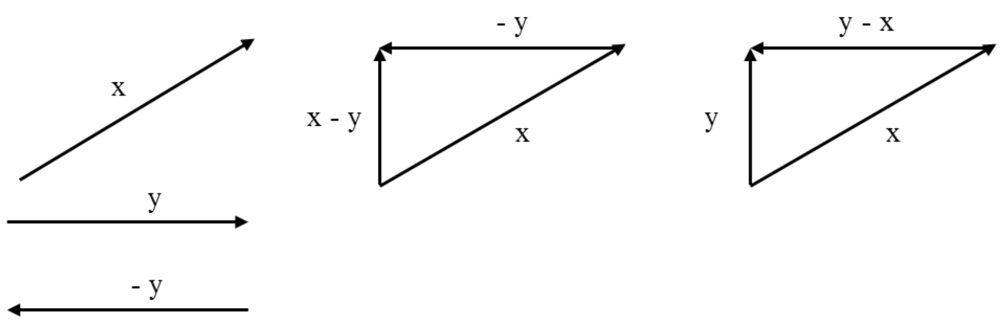
Πρόσθεση: Το άθροισμα δυο διανυσμάτων δίνεται από τη διαγώνιο του παραλληλογράμμου που έχει τα δυο εν λόγω διανύσματα ως προσκείμενες πλευρές. Εναλλακτικά δίνεται από το διάνυσμα που ενώνει την αρχή του πρώτου με το τέρμα του δευτέρου αν τοποθετηθούν συνεχόμενα. Από το αριστερό σχήμα του σχήματος 12 έχουμε $\vec{OA}+\vec{OB}=\vec{O\Gamma}$. Από το δεξιό σχήμα του σχήματος 12 έχουμε $\vec{OA}+\vec{AB}=\vec{OB}$. Αλγεβρικά, αν $\vec{x}=(x_1,x_2)$ και $\vec{y}=(y_1,y_2)$ τότε $\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2)$



Σχήμα 12: Πρόσθεση διανυσμάτων

Αφαίρεση: Η αφαίρεση δυο διανυσμάτων $\vec{x}-\vec{y}$ ορίζεται ως η πρόσθεση του πρώτου με το αρνητικό του δευτέρου $\vec{x}+(-\vec{y})$ ή εναλλακτικά ως το διάνυσμα που πρέπει να προστεθεί στο πρώτο για να μας δώσει το δεύτερο (Σχήμα 13). Αλγεβρικά, αν $\vec{x}=(x_1,x_2)$ και $\vec{y}=(y_1,y_2)$ τότε $\vec{x}-\vec{y}=(x_1-y_1,x_2-y_2)$.

Κάθε πλευρά ενός τριγώνου μπορεί να γραφεί είτε ως ένα διάνυσμα που προκύπτει από το άθροισμα των διανυσμάτων άλλων δυο πλευρών είτε ως ένα διάνυσμα που προκύπτει από τη διαφορά των διανυσμάτων των άλλων δυο πλευρών.



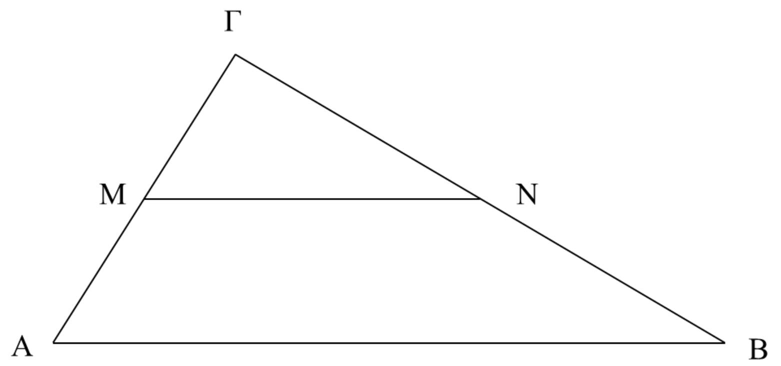
Σχήμα 13: Αφαίρεση διανυσμάτων

Το γινόμενο ενός διανύσματος $\vec{x}$ με κάποιον πραγματικό αριθμό λ ορίζεται ως το διάνυσμα $\lambda \vec{x}$ που έχει μήκος ίσο με $\left\|\lambda \vec{x}\right\| = \|\lambda\| \left\|\vec{x}\right\|$ και κατεύθυνση ίδια με το διάνυσμα $\vec{x}$ αν το λ είναι θετικός αριθμός και ίδια με το $-\vec{x}$ αν το λ είναι αρνητικός αριθμός. Αλγεβρικά αν $\vec{x} = (x_1, x_2)$ τότε $\lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2)$

Άσκηση: Να δειχτεί ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα 2 πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ ισούται με το μισό της άλλης πλευράς.

Έχουμε $\vec{\text{ΑΓ}} = 2\vec{\text{ΜΓ}}$ και $\vec{\text{ΓΒ}} = 2\vec{\text{ΓΝ}}$. Από το τρίγωνο ΑΓΒ (Σχήμα 12) έχουμε $\vec{\text{ΑΒ}} = \vec{\text{ΑΓ}} + \vec{\text{ΓΒ}}$

Από το τρίγωνο ΜΓΝ έχουμε $\vec{\text{ΜΝ}} = \vec{\text{ΜΓ}} + \vec{\text{ΓΝ}} = \dfrac{\vec{\text{ΑΓ}}}{2} + \dfrac{\vec{\text{ΓΒ}}}{2} = \dfrac{\vec{\text{ΑΒ}}}{2}$



Σχήμα 14

Μοναδιαία διανύσματα: Είναι τα διανύσματα που έχουν μέτρο 1. Συνήθως συμβολίζονται με $\hat{x}$, $\hat{a}$. Έστω διάνυσμα $\vec{x} = (a, \beta)$, τότε το διάνυσμα $\hat{x} = \dfrac{\vec{x}}{\|x\|} = \left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+\beta^2}}, \dfrac{\beta}{\sqrt{a^2+\beta^2}}\right) = (\sigma\upsilon\nu\,\hat{\phi}, \sigma\upsilon\nu\,\hat{\theta})$ είναι μοναδιαίο και έχει την ίδια κατεύθυνση με το $\vec{x}$.

Βασικά διανύσματα: Τα βασικά διανύσματα είναι μοναδιαία διανύσματα που έχουν την κατεύθυνση των αξόνων. Στο επίπεδο τα διανύσματα είναι τα $\hat{i} = (1,0)$ και $\hat{j} = (0,1)$. Οποιοδήποτε διάνυσμα $\hat{x} = (a, \beta)$ μπορεί να γραφεί ως $\vec{x} = (a, \beta) = a\hat{i} + \beta\hat{j}$.

Εσωτερικό γινόμενο: Έστω δυο διανύσματα $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ και $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$. Το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως η ποσότητα $\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = \sum_{\iota=1}^{2} \alpha_\iota \beta_\iota$

Αν έχουμε $\vec{\beta} = \vec{\alpha}$ τότε $\vec{\alpha}\,\vec{\alpha} = \sum_{\iota=1}^{2} \alpha_\iota \alpha_\iota = \vec{\alpha}^{\,2}$ που προφανώς ισχύει.

Από το Σχήμα 15 και το νόμο των συνημίτονων έχουμε

$$\left\|\vec{\gamma}\right\|^2 = \left\|\vec{\alpha}\right\|^2 + \left\|\vec{\beta}\right\|^2 - 2\left\|\vec{\alpha}\right\|\left\|\vec{\beta}\right\| \sigma\upsilon\nu\,\hat{\theta} \qquad (7)$$

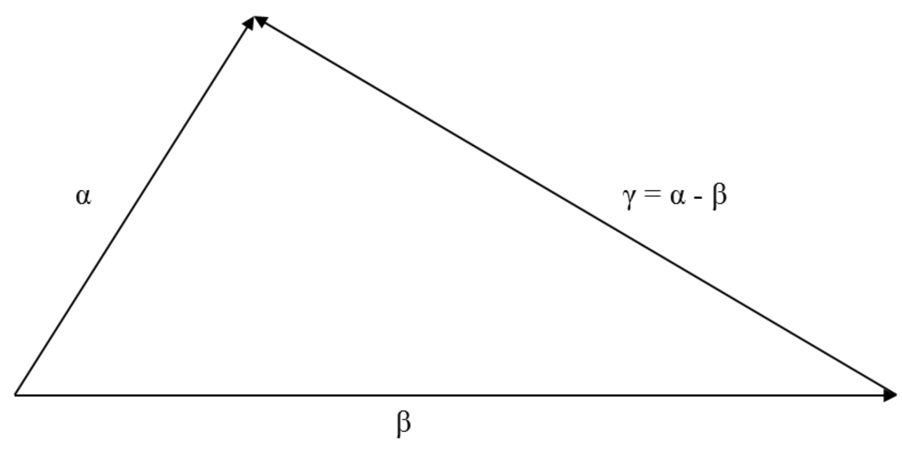
όπου $\hat{\theta}$ είναι η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Επίσης

$$\vec{\gamma}^{\,2} = \vec{\gamma}\,\vec{\gamma} = (\vec{\alpha} - \vec{\beta})(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \left\|\vec{\alpha}\right\|^2 + \left\|\vec{\beta}\right\|^2 - 2\,\vec{\alpha}\,\vec{\beta} \qquad (8)$$

Επομένως , από τις (7) και (8) έχουμε

$$\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = \left\|\vec{\alpha}\right\|\left\|\vec{\beta}\right\| \sigma\upsilon\nu\,\hat{\theta} \qquad (9)$$



Σχήμα 15 : Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Αν ένα διάνυσμα πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του τότε η γωνία $\hat{\theta}$ που σχηματίζει με τον εαυτό του είναι 0 μοιρών. Οπότε $\vec{\alpha}\vec{\alpha} = \left\|\vec{\alpha}\right\|\left\|\vec{\alpha}\right\| \sigma\upsilon\nu 0 = \left\|\vec{\alpha}\right\|^2$

Το εσωτερικό γινόμενο χρησιμοποιείται κυρίως

- για να υπολογιστεί η γωνία $\hat{\theta}$ μεταξύ δυο διανυσμάτων με τον τύπο $\sigma\upsilon\nu\,\hat{\theta} = \dfrac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\left\|\vec{\alpha}\right\|\left\|\vec{\beta}\right\|}$
- για να διαπιστώσουμε αν δυο διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους. Αν είναι κάθετα θα σχηματίζουν γωνία $\hat{\theta} = 90^o$ της οποίας το συνημίτονο ισούται με μηδέν. Επομένως το εσωτερικό γινόμενο καθέτων διανυσμάτων ισούται με μηδέν

Άσκηση: Να υπολογιστεί η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{a} = (1,2)$ και $\vec{\beta} = (3,1)$. Έχουμε $\sigma\upsilon\nu\,\hat{\theta} = \dfrac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\left\|\vec{\alpha}\right\|\left\|\vec{\beta}\right\|} = \dfrac{(1,2)(3,1)}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{3^2+1^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{50}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ άρα $\hat{\theta} = 45^o$.

Άσκηση: Σε ένα σύστημα συντεταγμένων έχουμε $\vec{\mathrm{OA}} = (1,2)$, $\vec{\mathrm{OB}} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ και σημείο Γ(-1,8). Να δειχτεί ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

Οι κορυφές του τριγώνου είναι τα σημεία Α(1,2), Β(4,3) και Γ(-1,8). Ένας τρόπος να δείξουμε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο είναι να υπολογίσουμε τα μήκη των πλευρών του και να δούμε αν ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα. Εναλλακτικά βλέπουμε αν το εσωτερικό γινόμενο δυο πλευρών ισούται με μηδέν. Η πλευρά ΑΒ δίνεται από το διάνυσμα $\vec{\mathrm{AB}} = (4-1, 3-2) = (3,1)$. Ομοίως $\vec{\mathrm{A\Gamma}} = (-1-1, 8-2) = (-2,6)$. Παρατηρούμε ότι $\vec{\mathrm{AB}}\,\vec{\mathrm{A\Gamma}} = (3,1)(-2,6) = 0$ επομένως $\vec{\mathrm{AB}} \perp \vec{\mathrm{A\Gamma}}$

Εμβαδόν τριγώνου-ορίζουσα

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα τρίγωνο που σχηματίζεται από δύο διανύσματα $\vec{\alpha} = (a_1, a_2)$ και $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$ όπως στο σχήμα 17. Το εμβαδό του τριγώνου ισούται με $E = \frac{1}{2}\left\|\vec{\alpha}\right\|\left\|\vec{\beta}\right\|\eta\mu\,\hat{\theta}$. Μοιάζει με τον τύπο του εσωτερικού γινομένου, μόνο που αντί για συνημίτονο έχει ένα ημίτονο. Γνωρίζουμε ότι

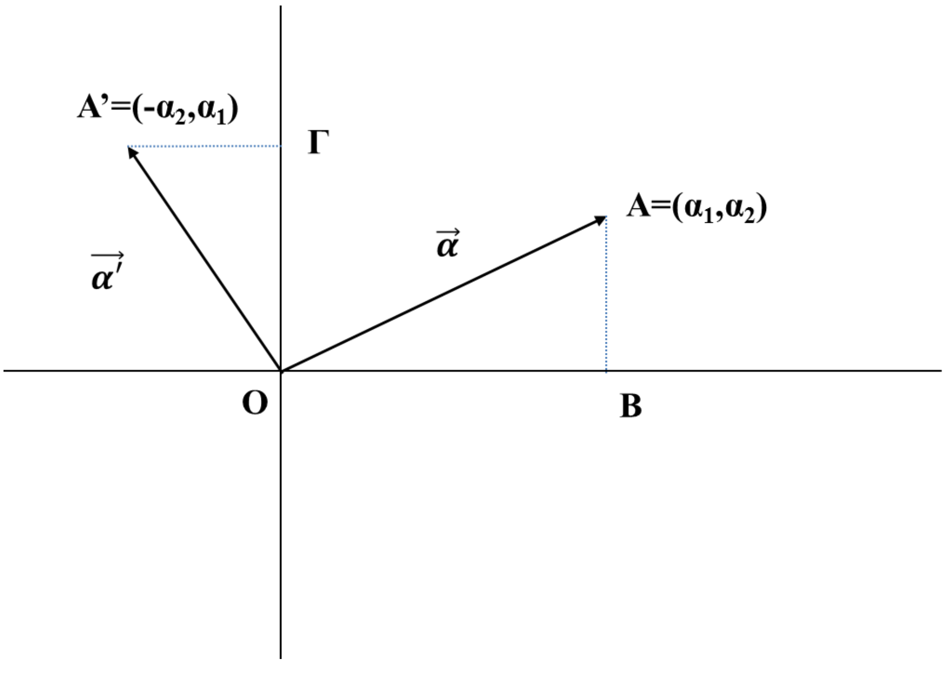
$\eta\mu\hat{\theta} = \sigma\upsilon\nu(\pi/2-\hat{\theta})$. Αν θέσουμε $\hat{\theta}' = \pi/2-\hat{\theta}$ το εμβαδό του τριγώνου ισούται με $E = \frac{1}{2}\left\|\vec{\alpha}\right\|\left\|\vec{\beta}\right\|\sigma\upsilon\nu\hat{\theta}'$. Βέβαια η γωνία που σχηματίζουν τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι ή $\hat{\theta}'$.

Έστω $\vec{\alpha}'$ το διάνυσμα που προκύπτει αν αντιστρέψουμε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ κατά π/2. Τα δυο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}'$ έχουν το ίδιο μέτρο και το εμβαδό του τριγώνου μπορεί να γραφεί $E = \frac{1}{2}\left\|\vec{\alpha}'\right\|\left\|\vec{\beta}\right\|\sigma\upsilon\nu\hat{\theta}'$. Ας δούμε πως μεταβάλλονται οι συντεταγμένες ενός διανύσματος αν περιστραφεί κατά 90 μοίρες. Τα τρίγωνα ΟΒΑ και ΟΒΑ’ στο σχήμα 16 είναι ίσα, επομένως $\vec{\alpha}' = (-a_2, a_1)$

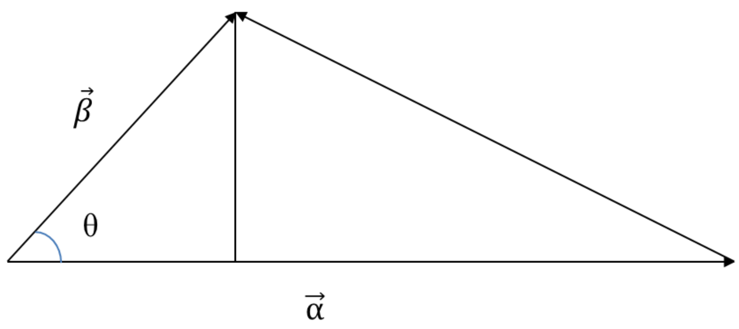
Επομένως το εμβαδό ισούται με

$E = \frac{1}{2}\left\|\vec{\alpha}'\right\|\left\|\vec{\beta}\right\|\sigma\upsilon\nu\hat{\theta}' = \frac{1}{2}\vec{\alpha}'\vec{\beta} = \frac{1}{2}(-\alpha_2,\alpha_1)(\beta_1,\beta_2) = \frac{1}{2}(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)$. Η ορίζουσα ορίζεται ως $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1$. Επομένως το εμβαδό του τριγώνου ισούται με

$E = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}$ και επομένως το εμβαδό του παραλληλογράμμου που ορίζεται με δυο προσκείμενες τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ έχει εμβαδό $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}$.



Σχήμα 16: Περιστροφή διανύσματος κατά 90 μοίρες



Σχήμα 17 : Εμβαδόν τριγώνου

Εμβαδόν Παραλληλογράμμου - Ορίζουσα

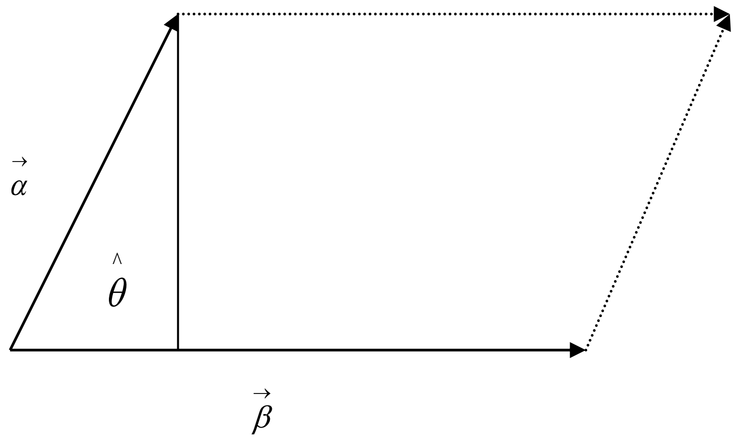
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα παραλληλόγραμμο (Σχήμα 18) που ορίζεται με προσκείμενες βάσεις τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(a_1,a_2)$ και $\vec{\beta}=(\beta_1,\beta_2)$. Το εμβαδόν δίνεται από τον τύπο

$$E=\left\|\vec{\alpha}\right\|\left\|\vec{\beta}\right\|\eta\mu\hat{\theta} \Leftrightarrow \mathrm{E}^2=\left\|\vec{\alpha}\right\|^2\left\|\vec{\beta}\right\|^2\eta\mu^2\hat{\theta}=\left\|\vec{\alpha}\right\|^2\left\|\vec{\beta}\right\|^2(1-\sigma\upsilon\nu^2\hat{\theta})=\left\|\vec{\alpha}\right\|^2\left\|\vec{\beta}\right\|^2-(\left\|\vec{\alpha}\right\|\left\|\vec{\beta}\right\|\sigma\upsilon\nu\hat{\theta})^2$$

$$=(\alpha_1^2+\alpha_2^2)(\beta_1^2+\beta_2^2)-(\vec{\alpha}\vec{\beta})^2=(\alpha_1\beta_1)^2+(\alpha_1\beta_2)^2+(\alpha_2\beta_1)^2+(\alpha_2\beta_2)^2-(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)^2$$

$$=(\alpha_1\beta_1)^2+(\alpha_1\beta_2)^2+(\alpha_2\beta_1)^2+(\alpha_2\beta_2)^2-(\alpha_1\beta_1)^2-(\alpha_2\beta_2)^2-\alpha_1\beta_2\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2\alpha_2\beta_1$$
$$=(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2$$

Επομένως $\mathrm{E}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}$



Σχήμα 18 : Εμβαδόν Παραλληλογράμμου

Σύστημα Γραμμικών Εξισώσεων (Cramer's rule)

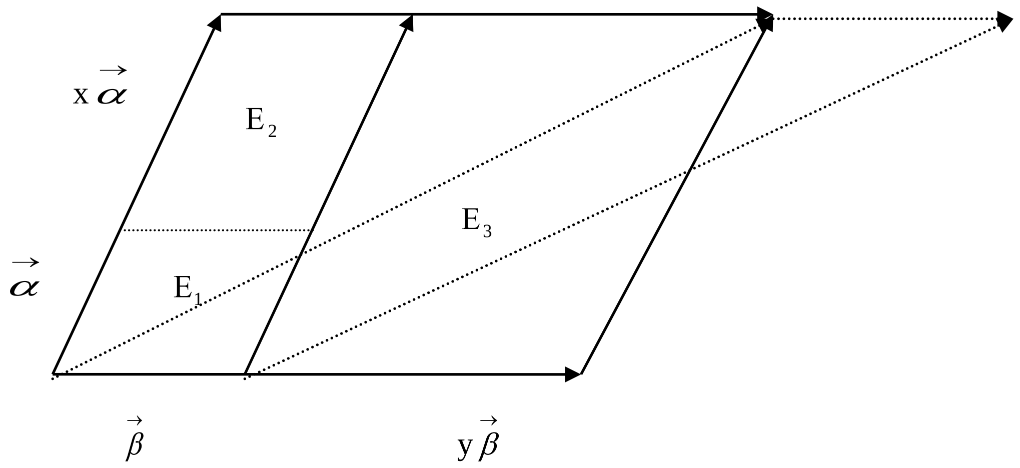
Έστω ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{array}{l} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{array}.$$

Το σύστημα μπορεί να γραφεί ως $(a_1, a_2)x + (\beta_1, \beta_2)y = (\gamma_1, \gamma_2) \Leftrightarrow \vec{\alpha}\, x + \vec{\beta}\, y = \vec{\gamma}$. Το εμβαδόν την περιοχής E_1 (Σχήμα 19) ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με βάσεις τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (a_1, a_2)$ και $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$. Επομένως $\mathrm{E}_1 = \begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$. Ορίζουμε την περιοχή $\mathrm{E}_4 = \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2$. Το εμβαδόν αυτής της περιοχής ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με βάσεις τα διανύσματα $x\vec{\alpha} = (xa_1, xa_2)$ και $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$. Επομένως $\mathrm{E}_4 = \begin{vmatrix} xa_1 & \beta_1 \\ xa_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 \\ a_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = x\mathrm{E}_1$.

Επομένως ο λόγος των περιοχών E_4 και E_1 μας δίνει την άγνωστη ποσότητα χ που θέλουμε να εκτιμήσουμε. Το εμβαδόν της περιοχής E_4 ισούται με εμβαδόν της σκιαγραφημένης περιοχής διότι πρόκειται για παραλληλόγραμμα με μια κοινή βάση. Αυτό το εμβαδό ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με βάσεις τα διανύσματα $x\vec{\alpha} + y\vec{\beta} = (xa_1 + y\beta_1, xa_2 + y\beta_2) = (\gamma_1, \gamma_2) = \vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$. Επομένως $\mathrm{E}_4 = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = x\mathrm{E}_1$.

Επομένως $x = \dfrac{\begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}}$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι $y = \dfrac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}}$



Σχήμα 19 : Γεωμετρική ερμηνεία του κανόνα του Cramer

Βάσεις

Δύο διανύσματα που έχουν την ίδια κατεύθυνση τα λέμε παράλληλα ενώ αν έχουν αντίθετες κατευθύνσεις τα λέμε αντιπαράλληλα. Δύο διανύσματα που είναι είτε παράλληλα είτε αντιπαράλληλα ονομάζονται συγγραμικά. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμικά ισχύει $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$

Αν υποθέσουμε ότι $\vec{\alpha} = (a_1, a_2)$ και $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$ και $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta} = (\lambda\beta_1, \lambda\beta_2)$ τότε τα κατευθύνοντα συνημίτονα για το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι $\sigma\upsilon\nu\,\hat{\phi} = \dfrac{\lambda\beta_1}{\sqrt{\lambda^2\beta_1^2 + \lambda^2\beta_2^2}} = \dfrac{\beta_1}{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}}$ και $\sigma\upsilon\nu\,\hat{\theta} = \dfrac{\lambda\beta_2}{\sqrt{\lambda^2\beta_1^2 + \lambda^2\beta_2^2}} = \dfrac{\beta_2}{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}}$ δηλαδή είναι ίδια (ή αντίθετα αν το λ είναι αρνητικός αριθμός) με τα κατευθύνοντα συνημίτονα του διανύσματός $\vec{\beta}$.

Από τη σχέση $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$ συνεπάγεται ότι κάποιος μη μηδενικός, γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ μας δίνει το μηδενικό διάνυσμα

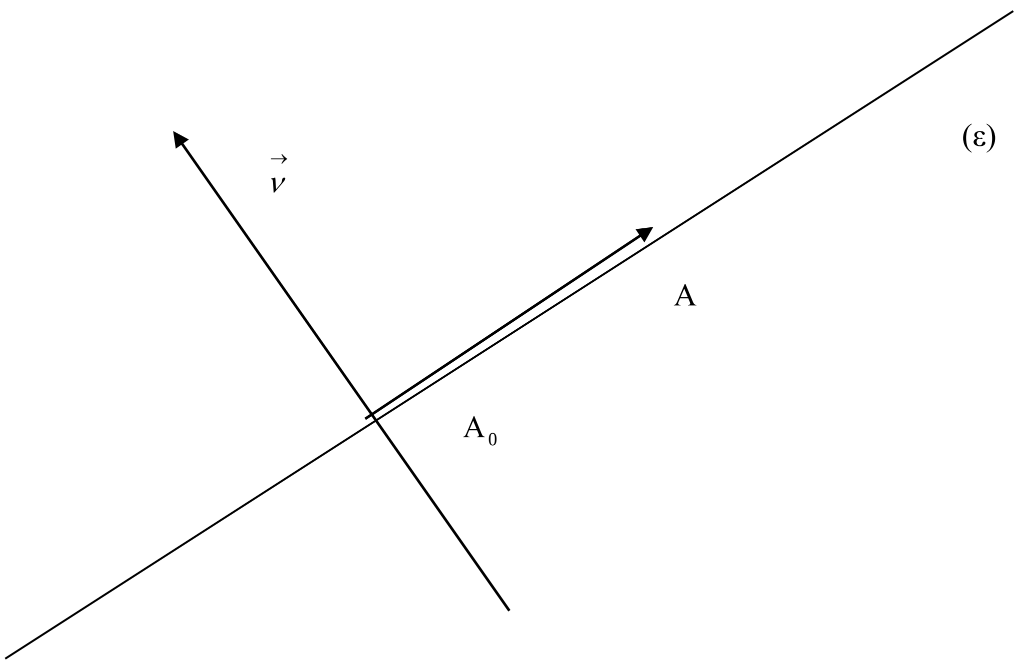
$\mu \vec{\alpha} + \nu \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \frac{\nu}{\mu} \vec{\beta}$ όπου $\frac{\nu}{\mu} = \lambda$

Επίσης συνεπάγεται ότι

$\left.\begin{matrix} \alpha_1 = \lambda\beta_1 \\ \alpha_2 = \lambda\beta_2 \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} \lambda = \dfrac{\alpha_1}{\beta_1} \\ \lambda = \dfrac{\alpha_2}{\beta_2} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$ και η ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισούται με το 0, $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$.

Κάθετο διάνυσμα ευθείας

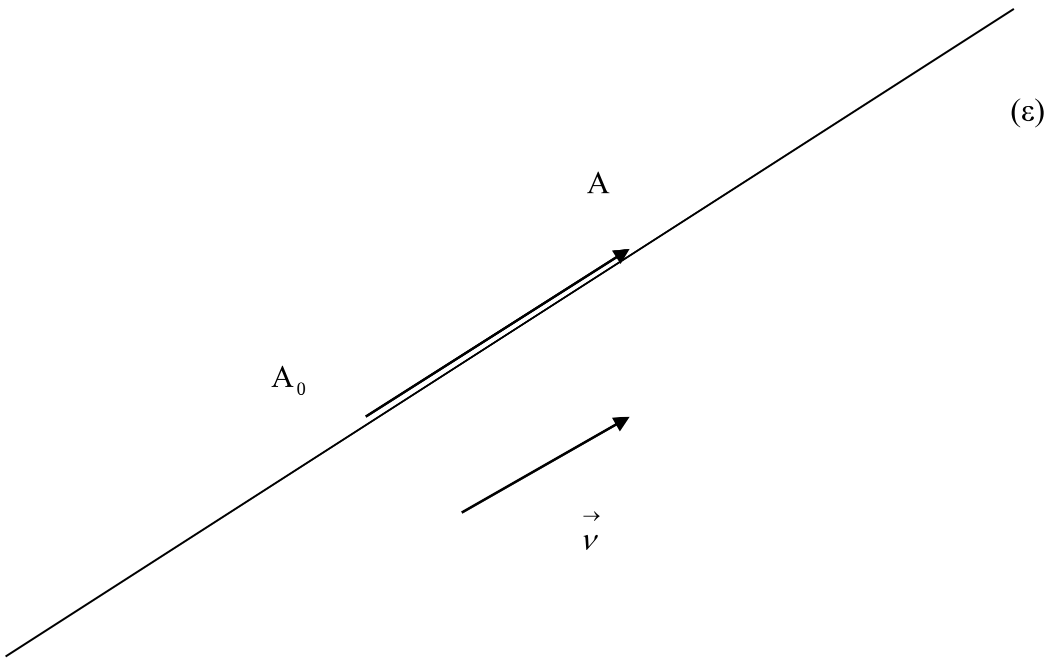
Μια ευθεία μπορεί να οριστεί από ένα σημείο της $A_0 = (x_0, y_0)$ και ένα κάθετό της διάνυσμα $\vec{\nu} = \alpha \hat{i} + \beta \hat{j} \neq \vec{0}$ ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων A(x,y) για τα οποία το διάνυσμα $\vec{A_0 A}$ είναι κάθετο στο $\vec{\nu}$ (Σχήμα 20) . Επομένως $\vec{\nu}\,\vec{A_0 A} = \alpha(x - y_0) + \beta(x - y_0) = 0$. Αυτή η εξίσωση μπορεί να γραφεί ως αx+βy=γ όπου $\gamma = \alpha x_0 + \beta y_0$. Επομένως εάν μας δοθεί μια ευθεία στη μορφή αx+βy=γ γνωρίζουμε αυτομάτως ένα κάθετο σε αυτήν διάνυσμα το ν(α,β).



Σχήμα 20 : Κάθετο διάνυσμα σε ευθεία

Παράλληλο διάνυσμα ευθείας

Μια ευθεία μπορεί να οριστεί από ένα σημείο της $\mathrm{A}_0 = (x_0, y_0)$ και ένα παράλληλο της διάνυσμα $\vec{v} = \alpha \hat{i} + \beta \hat{j} \neq \vec{0}$ ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Α(x,y) για τα οποία το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}}$ και το διάνυσμα $\vec{v}$ είναι συγγραμικά(Σχήμα 21). Δηλαδή $\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}} = \lambda \vec{v}$ ή εναλλακτικά $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0$.
Επομένως εάν μας δοθεί μια ευθεία στη μορφή αx+βy=γ γνωρίζουμε αυτομάτως ένα παράλληλο σε αυτήν διάνυσμα το ν(β,-α).



Σχήμα 21 : Παράλληλο διάνυσμα σε ευθεία

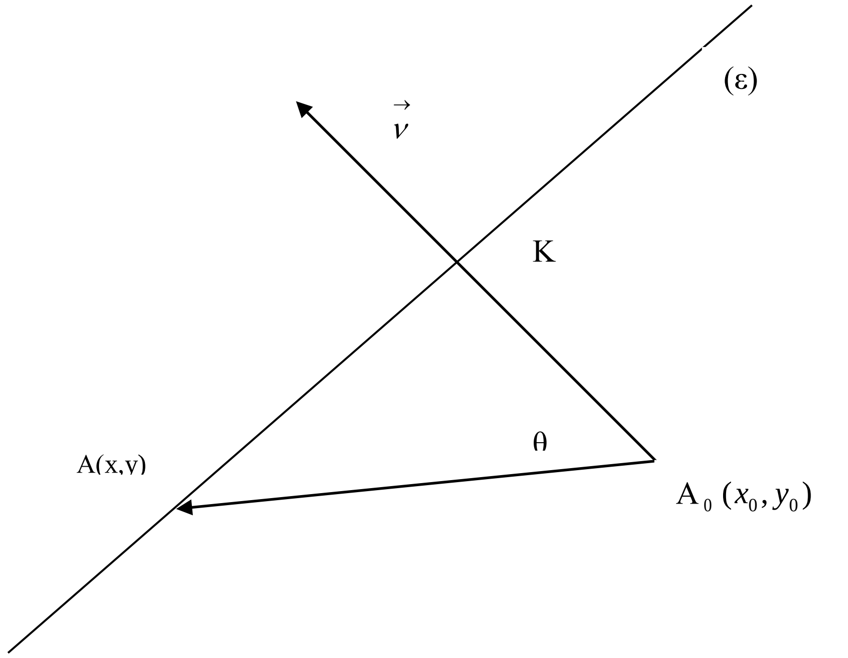
Απόσταση σημείου από ευθεία

Έστω σημείο $\mathrm{A}_0 = (x_0, y_0)$ και ευθεία (ε) : αx+βy+γ=0. Θέλουμε να βρούμε τη μικρότερη δυνατή απόσταση του σημείου από την ευθεία μας. Όπως έχουμε δει η μικρότερη δυνατή απόσταση υπολογίζεται παίρνοντας την κάθετο από το σημείο A_0 προς την ευθεία και υπολογίζοντας το ευθύγραμμο τμήμα από την ευθεία ως το σημείο μας. Έστω A_0K η ζητούμενη απόσταση, $\vec{\nu}=(\alpha,\beta)$ το κάθετο στην ευθεία διάνυσμα και Α ένα τυχαίο σημείο της ευθείας (ε) διάφορο του Κ όπως φαίνεται στο σχήμα 22. Από το ορθογώνιο τρίγωνο A_0KA έχουμε

$$\left\|\vec{A_0K}\right\|=\left\|\vec{A_0A}\right\|\sigma\upsilon\nu\,\hat{\theta}=\frac{\left\|\vec{A_0A}\right\|\left\|\vec{\nu}\right\|\sigma\upsilon\nu\,\hat{\theta}}{\left\|\vec{\nu}\right\|}=\frac{\vec{A_0A}\,\vec{\nu}}{\left\|\vec{\nu}\right\|}=\frac{(x-x_0,y-y_0)(\alpha,\beta)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Η απόσταση σημείου $A_0=(x_0,y_0)$ από ευθεία ε πρέπει να είναι θετικός αριθμός και για αυτό γράφεται

$$d(\varepsilon,A_0)=\frac{|\alpha x_0+\beta y_0+\gamma|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \qquad (10)$$



Σχήμα 22 : Απόσταση σημείου από ευθεία

Προβολές

Αν έχουμε δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$, τότε η προβολή, έστω $\vec{\gamma}$, του $\vec{a}$ πάνω στο $\vec{\beta}$ είναι το διάνυσμα που έχει την ίδια κατεύθυνση με το $\vec{\beta}$ και μήκος

$$\left\|\vec{\gamma}\right\|=\left\|\vec{\alpha}\right\|\sigma\upsilon\nu\,\hat{\theta}=\frac{\left\|\vec{\alpha}\right\|\left\|\vec{\beta}\right\|\sigma\upsilon\nu\,\hat{\theta}}{\left\|\vec{\beta}\right\|}=\frac{\vec{\alpha}\,\vec{\beta}}{\left\|\vec{\beta}\right\|} \qquad (11)$$

Η λογική είναι παρόμοια με αυτή του Σχήματος 22. Από την εξίσωση 11, βρήκαμε το μήκος του διανύσματος $\vec{\gamma}$, ασφαλώς υπάρχουν άπειρα διανύσματα με το ίδιο μήκος, εμείς επιθυμούμε να βρούμε αυτό που είναι παράλληλο με το διάνυσμα $\vec{\beta}$, Για να το πετύχουμε αυτό πολλαπλασιάζουμε το μήκος της προβολής με το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $\vec{\beta}$, δηλαδή με $\frac{\vec{\beta}}{\left\|\vec{\beta}\right\|}$ και το ζητούμενο διάνυσμα είναι

το $\vec{\gamma} = \frac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\left\|\vec{\beta}\right\|}\frac{\vec{\beta}}{\left\|\vec{\beta}\right\|}$

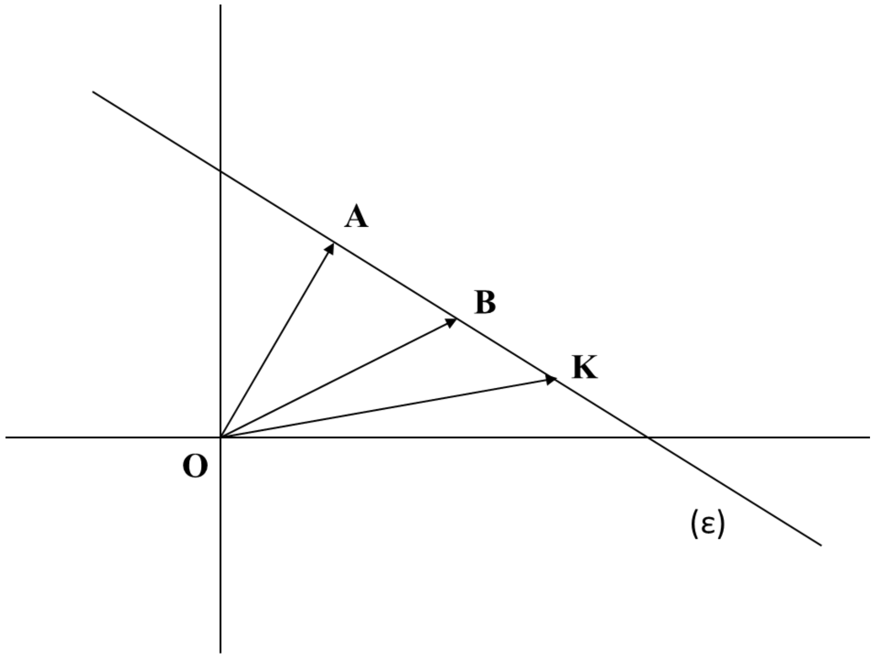
Διανυσματική εξίσωση ευθείας

Έστω ότι έχουμε μια ευθεία (ε) και δύο σημεία τους Α και Β. Θεωρούμε κάποιο σημείο Κ πάνω στην ευθεία. Από το Σχήμα 23 βλέπουμε ότι $\vec{\mathrm{OK}} = \vec{\mathrm{OA}} + \vec{\mathrm{AK}} = \vec{\alpha} + \vec{\mathrm{AK}}$

Το διάνυσμα $\vec{\mathrm{AK}} = \mu \vec{\mathrm{AB}}$. Από το τρίγωνο ΟΑΒ έχουμε $\vec{\mathrm{AB}} = \vec{\mathrm{OB}} - \vec{\mathrm{OA}} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$
Επομένως οποιοδήποτε σημείο της ευθείας Κ πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $\vec{\mathrm{OK}} = \vec{\mathrm{OA}} + \vec{\mathrm{AK}} = \vec{\alpha} + \mu(\vec{\beta} - \vec{\alpha})$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$
Και $\vec{\mathrm{OK}} = (x, y)$. Οπότε κάθε σημείο (x,y) της ευθείας θα πρέπει να ικανοποιεί τις σχέσεις $x = \alpha_1 + \mu(\beta_1 - \alpha_1)$ και $y = \alpha_2 + \mu(\beta_2 - \alpha_2)$. Για μ=0 παίρνουμε το Α ενώ για μ=1 παίρνουμε το σημείο Β. Λύνοντας τις δυο εξισώσεις ως προς μ έχουμε

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \frac{x-\alpha_1}{\beta_1-\alpha_1} \\ \mu &= \frac{y-\alpha_2}{\beta_2-\alpha_2} \end{aligned}\right\} \frac{x-\alpha_1}{\beta_1-\alpha_1} = \frac{y-\alpha_2}{\beta_2-\alpha_2} \Leftrightarrow y-\alpha_2 = \frac{\beta_2-\alpha_2}{\beta_1-\alpha_1}(x-\alpha_1) \text{ όπου } \frac{\beta_2-\alpha_2}{\beta_1-\alpha_1} \text{ είναι ο}$$

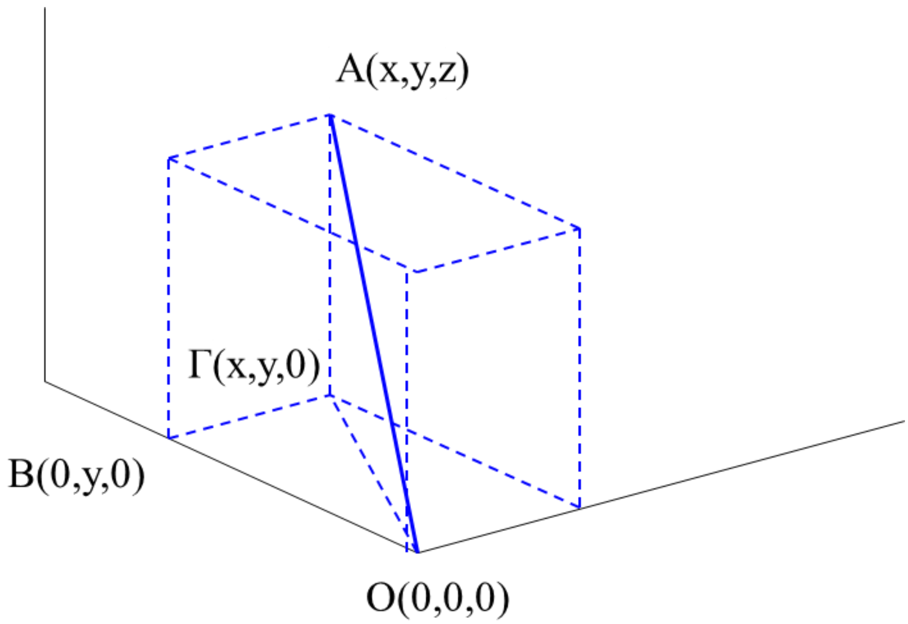
συντελεστής κλίσης της ευθείας που περνάει από τα σημεία Α και Β.



Σχήμα 23 : Διανυσματική εξίσωση ευθείας

Διανύσματα στο χώρο

Μέχρι στιγμής περιοριστήκαμε στο δισδιάστατο χώρο επειδή είναι ευκολότερο να δούμε γεωμετρικά κάποια από τα γνωρίσματα των διανυσμάτων. Μπορούμε να αναπαραστήσουμε γραφικά και ένα σημείο στον τρισδιάστατο χώρο όπως φαίνεται στο Σχήμα 24. Ένα σημείο Α(x,y,z) βρίσκεται από τη διαγώνιο ενός ορθογωνίου παραλλελεπιπέδου με ακμές που έχουν μήκη x, y και z αντίστοιχα και η μια κορυφή βρίσκεται πανω στην αρχή των αξόνων. Στο Σχήμα 24, η πλευρά ΟΒ ισούται με y μιας και μετακινούμστα y μονάδες στο δεύτερο άξονα και δεν μετακινούμαστε στους άλλους δυο, ομοίως έχουμε ΒΓ=x και ΓΑ=z. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΓ έχουμε $\mathrm{ΟΓ}^2 = \mathrm{ΟΒ}^2 + \mathrm{ΒΓ}^2 = y^2 + x^2$. Ομοίως από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΓΑ έχουμε $\mathrm{ΟΑ}^2 = \mathrm{ΟΓ}^2 + \mathrm{ΓΑ}^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Γενικώς, για ένα ν-διάστατο διάνυσμα $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, ..., a_\nu)$ το μήκος του θα ισούται με $\left\|\vec{a}\right\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + .. + a_\nu^2}$



Σχήμα 24: Αναπαράσταση σημείου στον τρισδιάστατο χώρο

Πράξεις μεταξύ διανυσμάτων

Αν έχουμε δύο διανύσματα $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, ..., a_\nu)$ και $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, ..., \beta_\nu)$

- Πρόσθεση διανυσμάτων : $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, ..., \alpha_\nu + \beta_\nu)$
- Αφαίρεση διανυσμάτων : $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, ..., \alpha_\nu - \beta_\nu)$
- Πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό : $\lambda \vec{\alpha} = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, ..., \lambda\alpha_\nu)$
- Εσωτερικό γινόμενο : $\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + ... + \alpha_\nu\beta_\nu = \sum_{\iota=1}^{\nu} \alpha_\iota\beta_\iota$
- Γωνίες με τους θετικούς ημιάξονες, $\sigma\upsilon\nu\,\hat{\phi}_\iota = \dfrac{\alpha_\iota}{\left\|\vec{\alpha}\right\|}$

Εξίσωση ευθείας στο χώρο

Για να βρούμε την εξίσωση μιας ευθείας στο ν-διάστατο χώρο θα χρησιμοποιήσουμε τη διανυσματική εξίσωσή της, αν έχουμε δύο σημεία Α και Β τηε ευθείας με διανύσματα $\vec{\mathrm{OA}} = \vec{\alpha}$ και $\vec{\mathrm{OB}} = \vec{\beta}$ τότε οποιοδήποτέ άλλο σημείο Γ της ευθείας με διάνυσμα $\vec{\mathrm{O\Gamma}} = \vec{\gamma}$ θα βρίσκεται από την εξίσωση $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \mu(\vec{\beta} - \vec{\alpha})$

Άσκηση : Να βρεθεί η διανυσματική εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A(1,0,1) και B(0,1,3); Στη συνέχεια να βρεθεί η Καρτεσιανή της εξίσωση;

Έχουμε $\vec{a} = (1,0,1)$ και $\vec{\beta} = (0,1,3)$. Η διανυσματική της εξίσωση είναι $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \mu(\vec{\beta} - \vec{\alpha}) = (1,0,1) - \mu((1,0,1) - \mu((0,1,3) - (1,0,1)) = (1,0,1) - \mu(-1,1,2)$

Μετατροπή σε Καρτεσιανή εξίσωση

$$(x,y,z) = (1-\mu, \mu, 1+2\mu) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x = 1-\mu \\ y = \mu \\ z = 1+2\mu \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \mu = 1-x \\ \mu = y \\ \mu = \dfrac{z-1}{2} \end{array}\right\} 1-x = y = \frac{z-1}{2}$$

Άσκηση : Η καρτεσιανή εξίσωση μιας ευθείας είναι $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z-2}{-2}$. Βρείτε τη διανυσματική εξίσωση της ευθείας;

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-1}{2} = \mu \\ \dfrac{y+1}{4} = \mu \\ \dfrac{z-2}{-2} = \mu \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x = 1+2\mu \\ y = -1+4\mu \\ z = 2-2\mu \end{array}\right\}$$

Επομένως, η διανυσματική εξίσωση είναι $\vec{\gamma} = (1,-1,2) + \mu(2,4,-2)$

Να βρεθεί η διανυσματική εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A(1,-1,0) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\mathrm{B\Gamma}}$ όπου B(-3,2,1) και Γ(2,1,0). Δείξτε ότι το σημείο Δ(-14,2,3) βρίσκεται πάνω στην ευθεία.

Έστω σημείο E(x,y,z) της ευθείας. Για να είναι το διάνυσμα $\vec{\mathrm{AE}}$ παράλληλο στο διάνυσμα $\vec{\mathrm{B\Gamma}} = (5,-1,-1)$ θα πρέπει $\vec{\mathrm{AE}} = \lambda \vec{\mathrm{B\Gamma}} \Leftrightarrow (x,y,z) = (1,-1,0) + \lambda(5,-1,-1)$

Επομένως $\left.\begin{array}{r} x = 1+5\lambda \\ y = -1-\lambda \\ z = -\lambda \end{array}\right\} \dfrac{x-1}{5} = -1-y = -z$. Παρατηρούμε ότι το σημείο Δ(-14,2,3) ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση.

Τομή δύο ευθειών

Δείξτε ότι οι ευθείες $\begin{array}{l} L : 2\vec{j} - 2\vec{k} + \lambda(\vec{i} - \vec{j}) \\ M : \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} + \mu(\vec{j} - \vec{k}) \end{array}$ τέμνονται και βρείτε το σημείο τομής τους.

Αν οι ευθείες L και M τέμνονται, τότε για κάποια τιμή του λ, μ έχουμε $\vec{\gamma} = \lambda \vec{i} + (2-\lambda)\vec{j} - 2\vec{k}$ και $\vec{\gamma} = \vec{i} + (\mu+1)\vec{j} - (2+\mu)\vec{k}$. Επομένως

$$\left.\begin{array}{r} \lambda = 1 \\ 2-\lambda = \mu+1 \\ 2+\mu = 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \mu = 0 \end{array}\right\}$$

Επομένως οι ευθείες τέμνονται και για να βρούμε το σημείο τομής βάζουμε είτε λ=1 στην L είτε μ=0 στην M και βρίσκουμε ότι το σημείο τομής είναι (1,1,-2).

Εξίσωση επιπέδου

Τα επίπεδα είναι δισδιάστατες επίπεδες επιφάνειες. Για να βρούμε την εξίσωση ενός επιπέδου πρέπει να γνωρίζουμε

- Ένα σημείο του επιπέδου και ένα κάθετο διάνυσμα
- Τρία μη συγγραμικά σημεία του επιπέδου
- Ένα σημείο του επιπέδου και δύο παράλληλα διανύσματα

Έστω $\mathrm{A}(x_0, y_0, z_0)$ σημείο του επιπέδου, $\vec{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$ ένα κάθετο στο επίπεδο διάνυσμα και P(x,y,z) ένα οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου. Άρα $\vec{v} \perp \vec{\mathrm{AP}}$ και θα πρέπει

$\vec{v}\,\vec{\mathrm{AP}} = 0 \Leftrightarrow \alpha(x-x_0) + \beta(y-y_0) + \gamma(z-z_0) = 0 \Leftrightarrow ax + \beta y + \gamma z = \delta$

όπου $\delta = \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0$

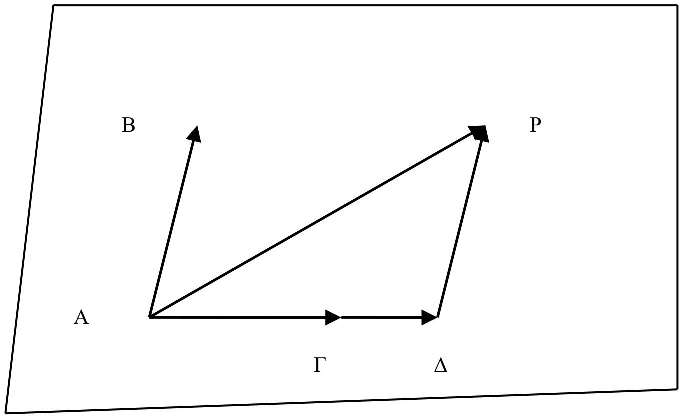
Έστω τρία μη συγραμμικά σημεία του επιπέδου Α, Β ,Γ όπως στο σχήμα 23 και Ο η αρχή των αξόνων η οποία έχει παραλειφθεί από το σχήμα για να γίνει πιο κατανοητό. Έστω $\vec{\mathrm{OA}} = \vec{\alpha}$, $\vec{\mathrm{OB}} = \vec{\beta}$ και $\vec{\mathrm{O\Gamma}} = \vec{\gamma}$. Έχουμε $\vec{\mathrm{AB}} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$ και $\vec{\mathrm{A\Gamma}} = \vec{\gamma} - \vec{\alpha}$. Αν Ρ είναι ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου έχουμε $\vec{\mathrm{OP}} = \vec{\mathrm{OA}} + \vec{\mathrm{AP}} = \vec{\alpha} + \vec{\mathrm{AP}}$. Παίρνουμε ένα σημείο Δ τέτοιο ώστε το διάνυσμα $\vec{\mathrm{A\Delta}}$ να είναι παράλληλο με το $\vec{\mathrm{A\Gamma}}$ και το διάνυσμα $\vec{\mathrm{\Delta P}}$ να είναι παράλληλο με το $\vec{\mathrm{AB}}$. Οπότε έχουμε $\vec{\mathrm{A\Delta}} = \nu\,\vec{\mathrm{A\Gamma}}$ και $\vec{\mathrm{\Delta P}} = \mu\,\vec{\mathrm{AB}}$. Επομένως $\vec{\mathrm{OP}} = \vec{\alpha} + \mu\,\vec{\mathrm{AB}} + \nu\,\vec{\mathrm{A\Gamma}} = \vec{\alpha} + \mu(\vec{\beta} - \vec{\alpha}) + \nu(\vec{\gamma} - \vec{\alpha}) = (1-\mu-\nu)\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} + \nu\vec{\gamma}$

Παράδειγμα : Βρείτε τη διανυσματική εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία Α(0,1,1), Β(1,1,0) και Γ(1,0,1).

Έστω ότι $\vec{\alpha} = (0,1,1)$, $\vec{\beta} = (1,1,0)$ και $\vec{\gamma} = (1,0,1)$. Από την εξίσωση $\vec{\mathrm{OP}} = \vec{\alpha} + \mu(\vec{\beta} - \vec{\alpha}) + \nu(\vec{\gamma} - \vec{\alpha}) = (1-\mu-\nu)\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} + \nu\vec{\gamma}$ έχουμε

$\vec{\mathrm{OP}} = (1-\mu-\nu)\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} + \nu\vec{\gamma} = (1-\mu-\nu)(0,1,1) + \mu(1,1,0) + \nu(10,1) = (\mu+\nu, 1-\nu, 1-\mu)$

Επομένως, x=μ+ν, y=1-ν,z=1-μ.



Σχήμα 23 : Εξίσωση επιπέδου με τρία μη-συγραμμικα σημεία

Η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ δυο επιπέδων ισούται με τη γωνία που σχηματίζεται μετεξυ δυο καθέτων, σε αυτά τα επίπεδα διανυσμάτων. Έστω δυο επίπεδα x+z=0 και $x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=1$. Δυο κάθετα σε αυτά τα επίπεδα διανύσματα είναι τα $\vec{a}=(1,0,1)$ και $\vec{\beta}=(2,1,1)$. Το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ των δυο διανυσμάτων είναι $\sigma\upsilon\nu\,\hat{\theta}=\frac{\vec{\alpha}\,\vec{\beta}}{\left\|\vec{\alpha}\right\|\left\|\vec{\beta}\right\|}=\frac{(1,0,1)(2,1,1)}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ επομένως η γωνία είναι 30 μοιρών.

Πίνακες

Ως πίνακας (έστω Α) ορίζεται η διάταξη $\mu\cdot\nu$ το πλήθος αριθμών σε μ γραμμές και ν στήλες

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1\nu}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{21}\\ ... & ... & ... & ...\\ \alpha_{\mu1} & \alpha_{\mu2} & ... & \alpha_{\mu\nu}\end{pmatrix}$$

Ο αριθμός α_{ij} καλείται το ij-στοιχείο του πίνακα. Ο πίνακας που έχει μία μόνο γραμμή, $(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad ... \quad \alpha_\nu)$, καλείται διάνυσμα/πίνακας γραμμή, ο πίνακας που έχει μια μόνο στήλη, $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ ...\\ \alpha_\mu\end{pmatrix}$, καλείται διάνυσμα/πίνακας στήλη ενώ ο πίνακας που έχει μια μόνο γραμμή και μια μόνο στήλη, a_{11}, καλείται πίνακας στοιχείο. Πίνακες με τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών καλούνται τετραγωνικοί πίνακες.

Πράξεις μεταξύ πινάκων

Πρόσθεση πινάκων : Ορίζεται μόνο για πίνακες ίδιας διάστασης (ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών). Έστω Γ=Α+Β, το ij-στοιχείο του πίνακα Γ είναι το $\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$. Έστω $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}$ τότε

$$\Gamma = A + B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \alpha_{12} + \beta_{12} \\ \alpha_{21} + \beta_{21} & \alpha_{22} + \beta_{22} \end{pmatrix}$$

Αφαίρεση πινάκων : Όπως και η πρόσθεση ορίζεται μόνο για πίνακες ίδιας διάστασης (ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών). Έστω Γ=Α-Β, το ij-στοιχείο του πίνακα Γ είναι το $\gamma_{ij} = \alpha_{ij} - \beta_{ij}$.

Γινόμενο πίνακα με αριθμός : Ορίζεται για πίνακες οποιασδήποτε διάστασης. Έστω Γ=λΑ, το ij-στοιχείο του πίνακα Γ είναι το $\gamma_{ij} = \lambda\alpha_{ij}$.

$$\Gamma = \lambda A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_{11} & \lambda\alpha_{12} \\ \lambda\alpha_{21} & \lambda\alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

Γινόμενο πινάκων : Έστω πίνακες Α και Β. Ο πολλαπλασιασμός ορίζεται μόνο όταν οι στήλες του πρώτου πίνακα ισούνται με τον αριθμό των γραμμών του δευτέρου. Αν για παράδειγμα ο πίνακας Α έχει μ γραμμές και λ στήλες και ο πίνακας Β έχει λ γραμμές και ν στήλες ο πολλαπλασιασμός μπορεί να πραγματοποιηθεί και το αποτέλεσμα θα είναι ένας πίνακας Γ με μ γραμμές και ν στήλες όπου τα στοιχεία του θα ισούνται με $\gamma_{ij} = \sum_{\kappa=1}^{\lambda} \alpha_{i\kappa}\beta_{\kappa j}$ Έστω $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}$ τότε

$$\Gamma = AB \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} & \alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} & \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} \end{pmatrix}$$

Εναλλακτικά, αν θεωρήσουμε έναν πίνακα με μ γραμμές και ν στήλες ως ένα σύνολο από μ διανύσματα γραμμές ή ν διανύσματα στήλες, μπορούμε να πούμε ότι το ij στοιχείο του πίνακα Γ δίνεται από το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος που βρίσκεται στη γραμμή i του πίνακα Α με το διάνυσμα που βρίσκεται στη στήλη j του πίνακα Β.

Θα πρέπει να τονίσουμε ότι δεν ισχύει πάντα ότι ΑΒ=ΒΑ και γενικά τις περισσότερες φορές δεν ισχύει η ισότητα.

Μοναδιαίος πίνακα

Ο Μοναδιαίος πίνακας τάξης ν, είναι ένας τετραγωνικός πίνακας με ν γραμμές και ν στήλες ο οποίος έχει μονάδες στην κύρια διαγώνιό του και μηδενικά στα υπόλοιπα στοιχεία του

$$\mathrm{I}_{\nu}=\begin{pmatrix}1&0&0&...&0\\0&1&0&...&0\\0&0&1&...&0\\...&...&...&...&...\\0&0&0&...&1\end{pmatrix}$$

Κύριο χαρακτηριστικό του μοναδιαίου πίνακα είναι ότι εάν πολλαπλασιαστεί ένας πίνακας Α με τον μοναδιαίο τότε το αποτέλεσμα είναι ο πίνακας Α,

$$\mathrm{AI}=\mathrm{IA}=\mathrm{A}$$

Ανάστροφος

Αν πάρουμε τις γραμμές ενός πίνακα $\mathrm{A}_{\mu\nu}$ και τις τοποθετήσουμε ως στήλες στην ίδια σειρά τότε δημιουργείται ένας καινούριος πίνακας $\mathrm{A}'_{\nu\mu}$ ο οποίος καλείται ανάστροφος του Α.

Αν $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\\\beta_1&\beta_2&\beta_3\end{pmatrix}$ τότε $\mathrm{A}'=\begin{pmatrix}\alpha_1&\beta_1\\\alpha_2&\beta_2\\\alpha_3&\beta_3\end{pmatrix}$. Για τους ανάστροφους πίνακες ισχύει

$(\mathrm{A}+\mathrm{B})'=\mathrm{A}'+\mathrm{B}'$, $(\lambda\mathrm{A})'=\lambda\mathrm{A}'$, $(\mathrm{AB})'=\mathrm{B}'\mathrm{A}'$ και $(\mathrm{A}')'=\mathrm{A}$

Αντίστροφος

Ο αντίστροφος ενός τετραγωνικού πίνακα Α συμβολίζεται με A^{-1} και ορίζεται ως ο τετραγωνικός πίνακας που όταν πολλαπλασιαστεί με τον Α μας δίνει τον μοναδιαίο

$\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}=\mathrm{AA}^{-1}=\mathrm{I}$ ή, εναλλακτικά, αν ΑΒ=ΒΑ=Ι τότε $\mathrm{A}^{-1}=\mathrm{B}$

Παράδειγμα : δείξτε ότι ο αντίστροφος του $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$ είναι ο $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}$.

Θα πρέπει ΑΒ=ΒΑ=Ι. Έχουμε

$\mathrm{AB}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times2+1\times(-1)&1\times(-1)+1\times1\\1\times2+2\times(-1)&1\times(-1)+2\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ομοίως αποδεικνύεται ότι ΒΑ=Ι

Στην περίπτωση που η άσκηση δεν μας έδινε τον αντίστροφο και μας ζητούσε να τον βρούμε θα θέταμε $\mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}$ και θα πρέπει να ικανοποιούνται οι σχέσεις

$$\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{r}\alpha+\beta=1\\\alpha+2\beta=0\\\gamma+\delta=0\\\gamma+2\delta=1\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}\alpha=2\\\beta=-1\\\gamma=-1\\\delta=1\end{array}\right\}$$

Γενικώς, ο αντίστροφος ενός πίνακα $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ με δυο γραμμές και δυο στήλες δίνεται από τον τύπο $A^{-1} = \dfrac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$

Σύστημα Γραμμικών Εξισώσεων

Έστω ότι έχουμε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1\nu}x_\nu = \beta_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2\nu}x_\nu = \beta_2 \\ ... \\ a_{\mu 1}x_1 + a_{\mu 2}x_2 + ... + a_{\mu\nu}x_\nu = \beta_\mu \end{array}\right\}$$

Το σύστημα μπορεί να γραφεί σε μορφή πινάκων ως AX=B όπου

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2\nu} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & ... & a_{\mu\nu} \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_\nu \end{pmatrix} \text{και } B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ ... \\ \beta_\mu \end{pmatrix}$$

Η λύση του συστήματος δίνεται από τον τύπο $X = A^{-1}B$

Ελλάσονες ορίζουσες

Αν από έναν τετραγωνικό πίνακα A με ν γραμμές (και ν στήλες) αφαιρέσουμς την i γραμμή και την j στήλη τότε καταλήγουμε σε έναν τετραγωνικό πίνακα E_{ij} με ν-1 γραμμές του οποίου η ορίζουσα καλείται ελλάσων.

Παράδειγμα : Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Ο πίνακας E_{22} προκύπτει από τον πίνακα A αν αφαιρέσουμε τη δεύτερη γραμμή και τη δεύτερη στήλη, $E_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$ και η ελλάσων ορίζουσά του $|E_{22}| = 9 - 21 = -12$.

Ορίζουσες

Οι ορίζουσες ορίζονται για τετραγωνικούς πίνακες (έστω με ν γραμμές και ν στήλες) και η ορίζουσα ενός πίνακα $A = [\alpha_{ij}]$ ισούται με $|A| = \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_{ij} A_{ij}$ για κάποια τυχαία επιλεγμένη γραμμή i ή $|A| = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_{ij} A_{ij}$ όπου $A_{ij} = (-1)^{i+j}|E_{ij}|$

Επομένως η ορίζουσα ενός 3×3 τριγωνικού πίνακα $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \delta & \varepsilon & \zeta\\ \eta & \theta & \iota\end{pmatrix}$ ισούται με

$$|\mathrm{A}|=\alpha(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}\varepsilon & \zeta\\ \theta & \iota\end{vmatrix}+\beta(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}\delta & \zeta\\ \eta & \iota\end{vmatrix}+\gamma(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}\delta & \varepsilon\\ \eta & \theta\end{vmatrix}=\alpha\begin{vmatrix}\varepsilon & \zeta\\ \theta & \iota\end{vmatrix}-\beta\begin{vmatrix}\delta & \zeta\\ \eta & \iota\end{vmatrix}+\gamma\begin{vmatrix}\delta & \varepsilon\\ \eta & \theta\end{vmatrix}$$

Έστω πίνακας A και B ο αντίστροφός του $\mathrm{B}=\mathrm{A}^{-1}$. Το ij στοιχείο του πίνακα B είναι

$$\mathrm{B}_{ji}=\frac{\mathrm{A}_{ij}}{|\mathrm{A}|}$$

Παράδειγμα : Έστω πίνακας $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$. Να βρεθεί ο αντίστροφός του B. Η ορίζουσα του πίνακα είναι $|\mathrm{A}|=1\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-3+8+3=8$. Το στοιχείο $\mathrm{B}_{11}=\frac{\mathrm{A}_{11}}{|\mathrm{A}|}=\frac{1}{8}(-1)^{1+1}|\mathrm{E}_{11}|=\frac{1}{8}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-\frac{3}{8}$

Ομοίως βρίκουμε και τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα B και έχουμε

$$\mathrm{B}=\mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-3 & 4 & 1\\ 4 & -8 & 4\\ 1 & 4 & -3\end{pmatrix}$$

Πίνακες Μετάβασης

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τρεις τοποθεσίες (καταστάσεις). Ας υποθέσουμε επίσης ότι ο χρόνος αποτελείται από διακριτά βήματα. Από την κατάσταση 1 μπορούμε στο επόμενο βήμα είτε να μείνουμε στην κατάσταση 1, είτε να πάμε στην κατάσταση 2 είτε στην κατάσταση 3. Από την κατάσταση 2 πάμε είτε στην κατάσταση 1 είτε στην κατάσταση 2 ενώ από την κατάσταση 3 μπορούμε να πάμε μόνο στην κατάσταση 1. όλη αυτή η πληροφορία μπορεί να συνοψιστεί σε έναν 3×3πίνακα μετάβασης

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

όπου το ij κελί του πίνακα παίρνει την τιμή 1 αν υπάρχει τρόπος να πάω από την κατάσταση i στην κατάσταση j και 0 διαφορετικά.

Ας δούμε τώρα με πόσους τρόπους μπορώ να πάω από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 2 σε 2 βήματα. Το σύνολο των δυνατών τρόπων θα ισούται με τον αριθμό των τρόπων που μπορώ να πάω από την κατάσταση 1 σε οποιαδήποτε άλλη κατάσταση j (j=1,2,3) σε ένα βήμα πολλαπλασιαζόμενο με τον αριθμό των τρόπων με τους οποίους μπορώ να πάω από την κατάσταση j στην κατάσταση 2 σε ένα βήμα, δηλαδή με $\sum_{j=1}^{3}\mathrm{M}_{1j}\mathrm{M}_{j2}$. Αυτό είναι το εσωτερικό γινόμενο της πρώτης γραμμής του πίνακα Μ με τη δεύτερη στήλη του και επομένως είναι στοιχείο του πίνακα M^2. Ομοίως μπορώ να υπολογίσω και το σύνολο των τρόπων για τις υπόλοιπες καταστάσεις. Ο πίνακας $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ μας δίνει στο ij κελί του τον αριθμό των τρόπων με τους οποίους μπορώ να πάω από την κατάσταση i στην κατάσταση j σε 2 βήματα. Έστω ότι θέλω να βρω τον αριθμό των τρόπων με τους οποίους μπορώ να πάω από την κατάσταση 3 στην κατάσταση 1 σε 5 βηματα. Θα υπολογίσω τον πίνακα $M^5 = \begin{pmatrix} 31 & 25 & 14 \\ 25 & 20 & 11 \\ 14 & 11 & 6 \end{pmatrix}$. Επομένως η μετάβαση μπορεί να γίνει με 6 τρόπους.

Πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης

Έστω ότι δεν γνωρίζουμε απλά την κατάσταση στην οποία μπορούμε να βρεθούμε στο επόμενο βήμα αλλά και την πιθανότητα με την οποία μπορούμε να πάμε σε αυτή την κατάσταση. Μπορούμε να έχουμε ένα τετραγωνικό πίνακα Π με τόσες γραμμές όσες είναι και οι καταστάσεις όπου το ij στοιχείο (π_{ij}) θα δηλώνει την πιθανότητα να πάμε από την κατάσταση i στην κατάσταση j. Έστω στο προηγούμενο παράδειγμα ότι έχουμε έναν πίνακα $\Pi = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Οι γραμμές αθροίζουν στη μονάδα μιας και σίγουρα σε κάθε βήμα ή θα μείνουμε στην ίδια κατάσταση ή θα πάμε σε κάποια άλλη. Έστω $\pi_{ij}^{(k)}$ η πιθανότητα να πάμε από την κατάσταση i στην κατάσταση j σε κ βήματα. Ποιά είναι η πιθανότητα να πάμε από την κατάσταση 2 στην κατάσταση 3 σε δυο βήματα; Είναι βασικά η πιθανότητα να πάμε από την 2 στην 1σε ένα βήμα πολλαπλασιαζόμενη με την πιθανότητα να πάμε από την 1 στην 3 επίσης σε ένα βήμα, δηλαδή $\pi_{23}^{(2)} = \pi_{21}\pi_{13} = \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{6} = 0.1667$. Εναλλλακτικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι $\pi_{23}^{(2)} = \pi_{21}\pi_{13} + \pi_{22}\pi_{23} + \pi_{23}\pi_{33} = \sum_{j=1}^{3}\pi_{2j}\pi_{j3} = \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{6} = 0.1667$. Οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι ένα εσωτερικό γινόμενο της δεύτερης γραμμής του πίνακα Π με τη δεύτερη στήλη του πίνακα Π. Ο πίνακας Π^2 έχει ως στοιχεία τις πιθανότητες να αλλάξουμε κατάσταση σε 2 βήματα.

$$\Pi^2 = \begin{pmatrix} 0.6111 & 0.2778 & 0.1111 \\ 0.4167 & 0.4167 & 0.1667 \\ 0.3333 & 0.3333 & 0.3333 \end{pmatrix}$$

Ομοίως ο πίνακας Π^{κ} δίνει τις πιθανότητες μετάβασης μεταξύ καταστάσεων σε κ βήματα.

Παράδειγμα : 3 άσπρες και 2 μαύρες μπάλες είναι κατανεμημένες σε δύο δοχεία, Α και Β, με τέτοιο τρόπο ώστε το δοχείο Α να περιέχει 2 μπάλες και το δοχείο Β να περιέχει 3 μπάλες. Λέμε ότι το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση i, $i = 0, 1, 2$, αν το δοχείο Α περιέχει i μαύρες μπάλες. Σε κάθε βήμα (περίοδο) τραβάμε τυχαία μία μπάλα από κάθε δοχείο και τις αντικαθιστούμε αμοιβαία, δηλαδή τοποθετούμε την μπάλα που τραβήξαμε από το δοχείο Α στο δοχείο Β και την μπάλα που τραβήξαμε από το δοχείο Β στο δοχείο Α. Γράψτε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης.

Αν το δοχείο Α περιέχει 0 μαύρες μπάλες τότε με πιθανότητα 2/3 θα περιέχει 1 μαύρη μπάλα στο επόμενο βήμα (αφού 2 από τις 3 μπάλες στο δοχείο Β είναι μαύρες) και με πιθανότητα 1/3 θα περιέχει πάλι 2 άσπρες μπάλες. Αν περιέχει 1 μαύρη μπάλα τότε η πιθανότητα να περιέχει 2 στο επόμενο βήμα ισούται με την πιθανότητα να επιλέξουμε 1 άσπρη μπάλα από το δοχείο Α (1/2) πολλαπλασιαζόμενη με την πιθανότητα να επιλέξουμε 1 μαύρη μπάλα από το δοχείο Β (1/3), άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι 1/6, ομοίως μπορούμε να βρούμε ότι η πιθανότητες να περιέχει 1 και 0 μαύρες μπάλες στο επόμενο βήμα είναι ½ και 1/3 αντίστοιχα. Αν το δοχείο Α περιέχει 2 μαύρες μπάλες τότε με πιθανότητα 1 θα περιέχει 1 μαύρη μπάλα στο επόμενο βήμα.

Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης μπορεί να γραφεί ως

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ασκήσεις

1. Γνωρίζοντας ότι η οι θερμοκρασίες στην κλίμακα Φαρενάιτ(Φ) και στην κλίμακα(Κ) Κελσίου συνδέονται γραμμικά με τη σχέση Φ=α+βΚ και ότι το νερό παγώνει στους 32 βαθμούς Φαρενάιτ που ισοδυναμούν με 0 βαθμούς στην κλίμακα Κελσίου και βράζει στους 212 βαθμούς Φαρενάιτ που ισοδυναμούν με 100 βαθμούς στην κλίμακα Κελσίου, να βρείτε τα α και β;
2. Να δειχτεί ότι τα σημεία Α(1,4), Β(4,5), Γ(-3,-2) και Δ(-6,-3) είναι κορυφές παραλληλογράμμου.
3. Να δειχτεί ότι το μέσο Μ της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου ισαπέχει από τις τρεις κορυφές του.
4. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ. Αν γνωρίζουμε ότι Α(4,0), Β(1,3) και Γ(-4,-3). Να βρεθούν επίσης οι εξισώσεις των διαμέσων του.
5. Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση της ευθείας (ε) y=3x-5 από την αρχή των αξόνων. Να δειχθεί ότι τα σημεία Α(1,4), Β(4,5), Γ(-3,-2) και Δ(-6,-3) είναι κορυφές παραλληλογράμμου
6. Να δειχθεί ότι το τρίγωνο που έχει σαν κορυφές τα σημεία Α(-1,1), Β(4,-3) και Γ(7,11) είναι ορθογώνιο
7. Να βρεθούν οι εξισώσεις των υψών ενός τριγώνου ΑΒΓ, αν Α(-2,5), Β(3,-1) και Γ(-4,-6)

8. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που είναι περιγεγραμμένος σε τρίγωνο που έχει εξισώσεις πλευρών $\varepsilon_1 : x + y - 2 = 0$, $\varepsilon_2 : 2x - y - 1 = 0$ και $\varepsilon_3 : x - 3y - 3 = 0$

9. Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ να δείξετε ότι $\left\|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right\|^2 = \left\|\vec{\alpha}\right\|^2 + \left\|\vec{\beta}\right\|^2$ (Πυθαγόρειο θεώρημα).

10. Έστω 2 διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ στο δισδιάστατο χώρο, να δείξετε ότι $\vec{\alpha}\vec{\beta} = \frac{1}{4}\left(\left\|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right\|^2 - \left\|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right\|^2\right)$

11. Βρείτε την παραμετρική εξίσωση της ευθείας που διέρχεται του σημείου Α(1,-1) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{a} = (1,2)$.

12. Βρείτε την παραμετρική εξίσωση της ευθείας που διέρχεται του σημείου Α(3,1) και είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{a} = (1,2)$.

13. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α(1,2,3) και Β(3,2,1).

14. Το διάνυσμα $\vec{a} = (1,3)$ έχει μέτρο $\sqrt{10}$. Να βρεθεί ένα διάνυσμα με την ίδια φορά και ένα με αντίθετη που να έχουν μέτρο 1;

15. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1,2), \vec{\beta} = (2,1), \vec{\gamma} = (8,7)$. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των άλλων δύο διανυσμάτων.

16. Ποια γωνία σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{a} = (1,\sqrt{3}), \vec{\beta} = (-1,\sqrt{3}), \vec{\gamma} = (-1,-\sqrt{3}), \vec{\delta} = (1,-\sqrt{3})$ με τον άξονα $x'x$;

17. Ποια γωνία σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{a} = (1,-1), \vec{\beta} = (1,\sqrt{3})$;

18. Η διανυσματική εξίσωση μιας ευθείας στο δισδιάστατο χώρο είναι (ε) : (x,y)=(1,1)+λ(1,2). Βρείτε την εξίσωση μιας ευθείας που είναι παράλληλη στην (ε) και διέρχεται του σημείου Α(2,5);

19. Η διανυσματική εξίσωση μιας ευθείας στο δισδιάστατο χώρο είναι (ε) : (x,y)=(2,1)+λ(3,2). Βρείτε την εξίσωση μιας ευθείας που είναι κάθετη στην (ε) και διέρχεται του σημείου Α(1,3);

20. Να βρεθεί η αλγεβρική και η διανυσματική εξισωση της ευθείας που διέρχεται των σημείων Α(1,4,2) και Β(-2,0,3);

21. Αν Α(1,-1,2) είναι σημείο του επιπέδου Ε, να βρεθεί η εξίσωση του Ε αν γνωρίζουμε ότι $\mathrm{OA} \perp \mathrm{E}$

22. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Έστω Κ το μέσο της ΒΓ και Μ το μέσο της ΑΒ. Δείξτε ότι $\vec{\mathrm{KM}} = \frac{1}{2}\vec{\Gamma\Delta} + \frac{1}{2}\vec{\mathrm{A}\Delta}$

23. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (x,y) που απέχουν εξίσου από τις ευθείες 2x-y=1 και x+y=2.

24. Η διανυσματική εξίσωση μιας ευθείας στο δισδιάστατο χώρο είναι (ε) : (x,y)=(2,1)+λ(1,1). Βρείτε την εξίσωση μιας ευθείας που είναι κάθετη στην (ε) και τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο 2;

25. Έστω Α τετραγωνικός πίνακας. Δείξτε ότι αν $\mathrm{A}^2 = \mathrm{I}$ τότε $\mathrm{A}^{\nu} = \mathrm{I}$ με ν>1

26. Έστω Α τετραγωνικός πίνακας. Δείξτε ότι αν $\mathrm{A}^2 = 0$ τότε $\mathrm{A}^{\nu} = 0$ με ν>1

27. Δείξτε ότι $(\mathrm{AB})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$

28. Αν $\mathrm{A}^{\nu} = 0$ για κάποιο ν, να δείξετε ότι $(\mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1} = \mathrm{I}+\mathrm{A}+\mathrm{A}^2+...+\mathrm{A}^{\nu}$

29. Να βρεθεί η ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α(-2,0) και από την οποία ισαπέχουν τα σημεία Β(1,-2) και Γ(2,1).

30. Έστω παραλληλόγραμο ΑΒΓΔ και Ε, Ζ σημεία τέτοια ώστε $\vec{\mathrm{AE}} = \frac{1}{4}\vec{\mathrm{A\Gamma}}$ και $\vec{\mathrm{AZ}} = \frac{3}{4}\vec{\mathrm{A\Gamma}}$. Να δείξετε ότι $\vec{\mathrm{AE}} // \vec{\mathrm{AZ}}$

31. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο Κ(2,4) και εφαπτομένη σε κάποιο σημείο Α την ευθεία y=-2x+13.

32. Να λυθεί το παρακάτω σύστημα με τον κανόνα του Cramer και με αντιστροφή του πίνακα συντελεστών

$$\begin{aligned} \alpha-\beta+2\gamma &= 1 \\ -2\alpha+3\beta+\gamma &= 0 \\ \alpha-3\beta+4\gamma &= 2 \end{aligned}$$

33. Αν Α, Β δύο τετραγωνικοί πίνακες, βρείτε ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι πάντα αληθείς

Α). $\mathrm{AB}^2\mathrm{A} = \mathrm{ABBA}$

Β) $(\mathrm{A}-\mathrm{B})(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2$

Γ) $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2 = \mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+2\mathrm{AB}$

Δ) $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2 = \mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-2\mathrm{AB}$

Ε) $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2 = \mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{AB}+\mathrm{BA}$

34. Η κατάσταση της οικονομίας μιας συγκεκριμένης χώρας χαρακτηρίζεται ως ‘κακή’, ‘καλή’. Αν η χώρα βρίσκεται σε ‘κακή’ οικονομική κατάσταση τότε βγαίνει από αυτήν την κατάσταση τον επόμενο χρόνο με πιθανότητα 0.3 ενώ αν η κατάστασή της χαρακτηρίζεται ‘καλή’, η πιθανότητα να αλλάξει κατάσταση τον επόμενο χρόνο είναι 0.2. Αν υποθέσουμε ότι το 2010 η κατάσταση της χώρας έχει χαρακτηριστεί ως ΄κακή’ ποιά είναι η πιθανότητα να έχει αλλάξει κατάσταση το 2013;

35. Αν με $\mathrm{A}_{\mu\times\nu}$ συμβολίζεται ο πίνακας με μ γραμμές και ν στήλες, και έχουμε τους πίνακες $\mathrm{B}_{3\times 2}$, $\Gamma_{3\times 3}$, $\Delta_{1\times 3}$ και $\mathrm{E}_{5\times 2}$ να βρείτε αν μπορούν να υπολογιστούν τα γινόμενα και να γράψετε και τις διαστάσεις του πίνακα που προκύπτει α) ΓΒ, ΒΓ, $\mathrm{B}\Gamma'$, ΒΔ, ΒΕ, BE', $\mathrm{B}\Gamma^{-1}$, $\Gamma^{-1}\mathrm{B}$, $\mathrm{B}'\Gamma^{-1}\Delta'$

Παράρτημα

- Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν
  1) έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενή τους γωνία ίση.
  2) έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη πλευρά τους ίση.
  3) έχουν τις τρεις πλευρές τους ίσες.
- Δύο τρίγωνα είναι όμοια αν
  1) έχουν δύο πλευρές ανάλογες μια προς μια και την περιεχόμενή τους γωνία ίση.
  2) έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη πλευρά τους ανάλογη.

3) έχουν τις τρεις πλευρές τους ανάλογες μια προς μια.

- Πυθαγόρειο Θεώρημα : Το τετράγωνο της υποτείνουσας ενός ορθογώνιου τριγώνου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δυο κάθετων πλευρών

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

- Θεώρημα του Θαλή : Όταν παράλληλες ευθείες τέμνονται από δύο άλλες ευθείες τότε τα τμήματα μεταξύ των παραλλήλων που ορίζονται στην μια τέμνουσα είναι ανάλογα

- Νόμος των συνημιτόνων :

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\,\hat{\mathrm{A}}$$

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu\,\hat{\mathrm{B}}$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\,\hat{\Gamma}$$

- Νόμως των ημιτόνων $\dfrac{\alpha}{\eta\mu\,\hat{\mathrm{A}}} = \dfrac{\beta}{\eta\mu\,\hat{\mathrm{B}}} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu\,\hat{\Gamma}}$

Τριγωνομετρικός αριθμός	Γωνία				
	0	30	45	60	90
Ημίτονο	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Συνημίτονο	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Εφαπτομένη	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Δεν ορίζεται
Συνεφαπτομένη	Δεν ορίζεται	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0