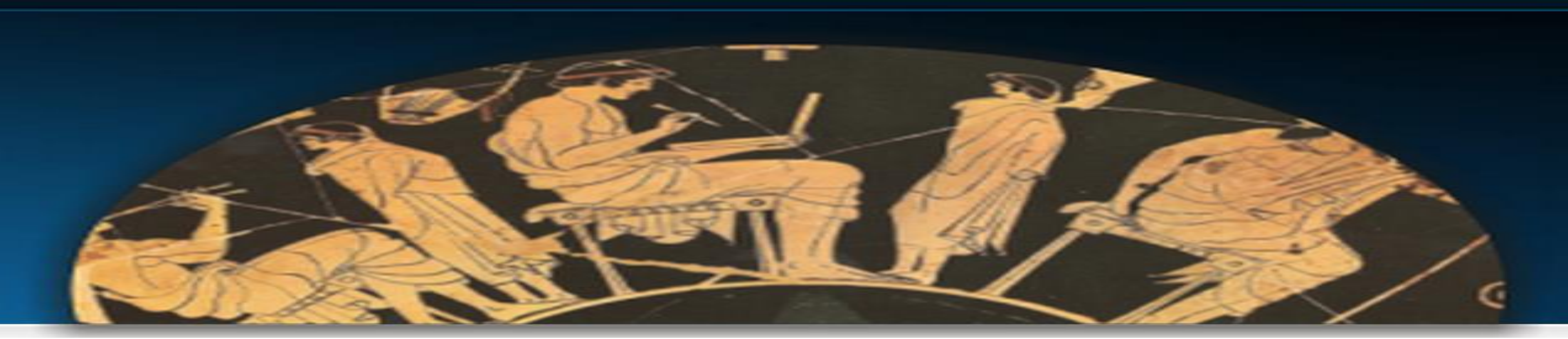
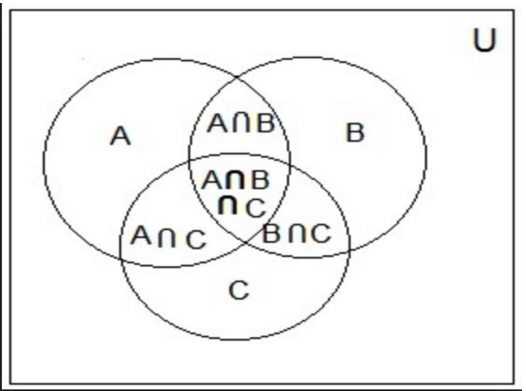


Ασκήσεις

Δημήτρης Μαυρίδης

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων



Έχετε στην ντουλάπα 2 ζευγάρια παπούτσια (1 κόκκινα και 1 μαύρα). Παίρνετε στην τύχη ένα παπούτσι με κάθε χέρι. Ποιά είναι η πιθανότητα να πάρετε ένα ζευγάρι;

- Έχουμε 4 στο σύνολο παπούτσια

Από τα 4 παπούτσια επιλέγω τα 2 και αυτό μπορεί να γίνει με

$$\binom{4}{2} = 6$$

Τα ζευγάρια είναι 2 (πλήθος ευνοικών περιπτώσεων)

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{\pi\lambda\eta\theta o\varsigma\ \varepsilon\upsilon\nu o\iota\kappa\omega\nu\ \pi\varepsilon\rho\iota\pi\tau\acute{\omega}\sigma\varepsilon\omega\nu}{\pi\lambda\eta\theta o\varsigma\ \delta\upsilon\nu\alpha\tau\omega\nu\ \pi\varepsilon\rho\iota\pi\tau\acute{\omega}\sigma\varepsilon\omega\nu} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$$\Omega = \{\mathrm{K1K2}, \mathrm{K1M1}, \mathrm{K1M2}, \mathrm{K2M1}, \mathrm{K2M2}, \mathrm{M1M2}\}$$

α) Έστω 2 ενδεχόμενα Α, Β με πιθανότητες $P(A) = 0.8$ και $P(\mathrm{B}) = 0.5$. Να δείξετε αν τα ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα/ξένα ή όχι.
β) Αν η πιθανότητα να συμβεί τουλάχιστον 1 είναι 0.7. Να δείξετε αν τα Α,Β είναι ανεξάρτητα ή όχι.

- α) Για να είναι ασυμβίβαστα θα πρέπει $P(A \cap B)$=0
- Η πιθανότητα να συμβεί τουλάχιστον ένα από τα Α, Β είναι $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)} - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap B) = 0.8 + 0.5 - P(A \cap B) = 1.3 - P(A \cap B)$
- $P(A \cap B)$=0 είναι άτοπο γιατί $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$>1. Άρα δεν είναι ασυμβίβαστα
- β) Για να είναι ανεξάρτητα θα πρέπει $P(A \cap B) = \mathrm{P(A)} \times \mathrm{P(B)}$
- $P(A \cap B) = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)}$-$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$=0.6
- $P(A) \times P(B) = 0.8 \times 0.5 = 0.4 \neq 0.6$
- Άρα δεν είναι ανεξάρτητα

Έστω τάξη με 15 αγόρια και 14 κορίτσια. 5 από τα αγόρια και 7 από τα κορίτσια είναι άριστα στα μαθηματικά.

- Να βρεθεί η πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγόμενος μαθητής να είναι άριστος
- Δοθέντος ότι ένας μαθητής είναι άριστος, ποιά είναι η πιθανότητα να είναι αγόρι

Έστω Α : το ενδεχόμενο ο μαθητής να είναι αγόρι

Ε : το ενδεχόμενο να είναι άριστος

$P(A) = 15/29, P(A') = \frac{14}{29}, P(E|A) = \frac{5}{15}, P(E|A') = 7/14$

$$P(E) = P(E|A) \times P(A) + P(E|A') \times P(A') = \frac{5}{15} \times \frac{15}{29} + \frac{7}{14} \times \frac{14}{29} = \frac{12}{29}$$

$$P(A|E) = \frac{P(E|A) \times P(A)}{P(E)} = \frac{\frac{5}{15} \times \frac{15}{29}}{\frac{12}{29}} = \frac{5}{12}$$

	Αγόρι	Κορίτσι	σύνολο
Μη άριστος	10	7	17
Άριστος	5	7	12
σύνολο	15	14	29

Σε ένα παιχνίδι με ζάρια, αν φέρουμε πάνω από 4 κερδίζουμε τόσα ευρώ όσα δείχνει το ζάρι, διαφορετικά χάνουμε τα ευρώ που θα φέρει το ζάρι. Μακροπρόθεσμα συμφέρει να παίξουμε;

- Η κατανομή των κερδών είναι

ζάρι	*κέρδος* x_i	πιθανότητα $P(x_i)$
1	-1	1/6
2	-2	1/6
3	-3	1/6
4	-4	1/6
5	5	1/6
6	6	1/6

$$\mathrm{E(x)} = \sum_{i=1}^{6} x_i \times P(x_i) = -1 \times \frac{1}{6} - 2 \times \frac{1}{6} - 3 \times \frac{1}{6} - 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

Η βαθμολογία σε ένα διαγώνισμα ακολουθεί την κανονική κατανομήμε μέση τιμή 36 και διακύμανση 16. Η βάση είναι το 24.

- Ποιά είναι η πιθανότητα να γράψει κάποιος κάτω από τη βάση;

$$P(X < 24) = P\left(\frac{X-36}{4} < \frac{24-36}{4}\right) = P(Z < -3) = 0.0013$$

- Ποιά είναι η πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγόμενος φοιτητής να γράψει μεταξυ 24 και 32;

$P(24 < X < 32) = P\left(\frac{24-36}{4} < \frac{X-36}{4} < \frac{32-36}{4}\right) = P(-3 < Z < -1) = P(Z < -1) - P(Z < -3) = 1 - 0.8413 - 1$ +0.9987=0.1574

- Σε ένα δείγμα 5 φοιτητών, ποιά είναι η πιθανότητα τουλάχιστον 1 φοιτητής να γράψει μεταξυ 24 και 32;

Έστω Υ ο αριθμός των φοιτητών που έγραψε μεταξύ 24 και 32 σε ένα σύνολο 5 φοιτητών

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{5}{0} \times 0.1574^0 \times (1 - 0.1574)^5 = 0.5753$$

- Σε τι βαθμό πρέπει να οριστεί η βάση ώστε η πιθανόητα να μην περάσει κάποιος να είναι το πολύ ίση με 5%

Έστω α η βάση που πρέπει να οριστεί

$$P(X \leq a) \leq 0.05 \leftrightarrow P\left(\frac{X-36}{4} \leq \frac{a-36}{4}\right) \leq 0.05 \leftrightarrow \frac{a-36}{4} = -1.645 \leftrightarrow \alpha$$
$$= -1.645 \times 4 + 36 = 29.42$$

Ένα διαγώνισμα έχει 10 ερωτήσεις με 4 επιλογές η κάθε μια. Ποιά είναι η πιθανότητα ένας μαθητής που απαντάει στην τύχη να απαντήσει σωστά στις μισές ερωτήσεις; Ποιός είναι ο αναμενόμενος αριθμός σωστών απαντήσεων για τον μαθητή μας;

Κάθε ερώτηση είναι ένα πείραμα Bernoulli

Η πιθανότητα σωστής απάντησης είναι $p = 0.25$

Η πιθανότητα να απαντήσει σωστά στις μισές ερωτήσεις είναι

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} \times 0.25^5 \times 0.75^5 = 0.0584$$

Ο αναμενόμενος αριθμός σωστών απαντήσεων είναι $\mathrm{E(X)} = \mathrm{n} \times p = 10 \times 0.25 = 2.5$

Μετρήθηκε η κατάθλιψη χρησιμοποιώντας μια επικυρωμένη κλίμακα σε μια ομάδα Α που ακολουθούσε ένα πρόγραμμα γυμναστικής και σε μια άλλη ομάδα Β που δεν χρησιμοποιούσε το εν λόγω πρόγραμμα. Η ομάδα Α μείωσε τα επίπεδα κατάθλιψης κατά μια μονάδα περισσότερο σε σχέση με την ομάδα Β ενώ το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη μείωση της κατάθλιψης κυμαίνεται από 0.7 έως 1.3 μονάδες

- Το πρόγραμμα γυμναστικής βοήθησε τους συμμετέχοντες;
- Θα άλλαζαν τα αποτελέσματα με ένα 99% διάστημα εμπιστοσύνης; Με ένα 90%;
- Τι θα συμπεραίνετε αν το 95% διάστημα εμπιστόσυνης κυμαινόταν από -0.5 έως 2.5;
- Τι πρέπει να εξασφαλίσει ο ερευνητής για να κάνει τις 2 ομάδες συγκρίσιμες;